S.X.Abjalilov, D.S.Xo'jamova

GEOMETRIYA AKSLANTIRISHLAR VA ALMASHTIRISHLAR

Uslubiy qo'llanma

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

NAVOIY DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI

Matematika kafedrasi

S.X.Abjalilov, D.S.Xo‘jamova

GEOMETRIYA
AKSLANTIRISHLAR VA ALMASHTIRISHLAR

(uslubiy qo‘llanma)

“Durdona” nashriyoti
Buxoro – 2023

UO'K 514(072)
22.151ya7
A 12
Abjalilov, S.X.
Geometriya. Akslantirishlar va almashtirishlar [Matn] : uslubiy qo'llanma / S.X. Abjalilov, D.S. Xo'jamova .- Buxoro: "Sadriddin Salim Buxoriy" Durdona, 2023.-44 b.
I. Xo'jamova, D.S.

KBK 22.151ya7

Ushbu uslubiy qo'llanma analitik geometriya fanining akslantirishlar va almashtirishlar bo'limiga bag'ishlangan. Akslantirishlar va almashtirishlarning ta'riflari, xossalari chuqur o'rganilgan hamda almashtirishlarning umumlashgan formulalari keltirib chiqarilgan. Qo'llanma pedagogika oliy o'quv yurtlarining 60110600 - Математика ва информатика ta'lim yo'nalishi talabalariga mo'ljallangan bo'lib, undan akademik litsey va umumta'lim maktablari yuqori sinf o'quvchilari hamda o'qituvchlar foydalanishlari mumkin.

Mualliflar:
Abjalilov S.X., NavDPI "Matematika" kafedrasi dotsenti, f-m.f.n.
Xo'jamova D.S., NavDPI Математика ва информатика ta'lim yo`nalishi 3-bosqich talabasi

Taqrizchilar:
Imomkulov S.A., NavDPI "Matematika" kafedrasi professori, f.-m.f.d.
Tojiyev I.I., NDKTU Oliy matematika va AT kafedrasi mudiri, f.-m.f.n.

Navoiy davlat pedagogika instituti Kengashining 26.06.2023 yildagi 11-son yig`ilishi qaroriga asosan nashr etishga tavsiya etildi.

ISBN 978-9910-9717-2-3

Geometriya – figuralarning
mumkin bo'lgan barcha harakatlarda
saqlanib qoluvchi xossalarini organadi…

Feliks Kleyn
(1849-1925)

Kirish

Matematikaning abstraktlashuvi (aksiomatik qurilishi) va uning tizimli ravishda rivojlanishiga eramizdan avvalgi III asrda yashab ijod qilgan Yevklidning xizmatlari beqiyos. U o'zining "Negizlar" asari bilan zamonasigacha yig'ilgan geometrik bilimlar majmuasini yaratish bilan birga, bilimlarni ta'riflar, aksiomalar, postulotlar va jumlalar (teoremalar) ketma-ketligida bayon etdi. Shu tahlid matematika binosining poydevori qurildi. Yevklidning mashhur beshta postuloti asosida rivojlangan geometriya fanda Yevklid geometriyasi deb nomlandi.

Yevklid geometriyasi qurilganidan buyon geometriya fani teoremalar zanjiri sifatida davom etib kelinmoqda. Ma'lumki, teoremalarni isbotlashda aksiomalar va ilgari isbot qilingan teoremalardan foydalaniladi. Shubhasiz, isbotsiz yoki noto'g'ri isbot natijasida tug'ilgan mantiqiy fikrlar yangi bir yolg'on yo`nalishni kelib chiqishiga sababchi bo`ladi. Isbotlashlar jarayonida bu kabi holatlarga ko`p marta duch kelingan.

Demak, isbotlash jarayonida asoslanuvchi (foydalaniluvchi) jumlaning to'g'ri bo'lishi, fanning keyingi taraqqiyotini ta'minlovchi asosiy vosita ekan.

Ma'lumki, isbotlashlarda chizmalar muhim ahamiyatga ega. Ba'zi hollarda isbotlash jarayonini olib borish uchun bir nechta chizmalardan foydalanishga to`g`ri keladi. Shubhasiz, isbot mukammal bo`lishi uchun barcha hollar ko'rib chiqilishi kerak. O'quvchi birgina holat uchun chizilgan chizma asosiga faqat birgina xususiy yechimga ega bo'lishi mumkin xolos.

Geometriyadagi ushbu mashhur savolga e'tibor qarataylik: "Uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi 180^0 ga tengmi?". Agar o'quvchi parallel to'g'ri chiziqlar bo'yicha bilimga ega bo'lsa bu savolga to'g'ri javob bera oladi. Chunki 2000 yildan ortiq davr ichida bu muammoni teorema sifatida isbotlashga bo'lgan urinishlar natijasida uni teorema emas, balki aksioma sifatida qaralishi kerakligi ma'lum bo'ldi.

XIX asrning 20-yillarida rus olimi N.I.Lobachevskiy parallellik tushunchasiga bog'liq tushunchani aksioma ekanligi, uning o'rniga boshqa tushunchani qabul qilganda boshqa bir yangi geometriya hosil bo'lishini ko'rsatib berdi va o'zining noyevklid Lobachevskiy geometriyasiga asos soldi (1826 yili 18 fevralda Qozon universiteti fizika-matematika fakulteti ilmiy kengashida "Geometriyadagi prinsiplar haqida muohazalar" nomli ma'ruzasi).

Keyingi izlanishlar davomida bir qancha noyevklid geometriyalar mantiqiy asoslandi. Jumladan, Keli-Kleyn sxemasi boʻyicha masofa va burchaklarni oʻlchash usullariga koʻra kelib chiquvchi tekislikdagi (Yevklid, Riman (elliptik) va Lobachevskiylarning (giperbolik) oʻzaro kesishmasidan hosil qilinuvchi) toʻqqizta geometriyani misol keltirish mumkin.

Masofani oʻlchash tipi / Burchakni oʻlchash tipi	Riman	Yevklid	Lobachevskiy
Riman	Rimanning elliptik geometriyasi	Yevklid geometriyasi	Lobachevskiyning giperbolik geometriyasi
Yevklid	Antiyevklid geometriya	Galiley geometriyasi	Antipsevdoyevklid geometriya
Lobachevskiy	Antigiperbolik geometriya	Minyakovskiy psevdoyevklid geometriyasi	Karrali giperbolik geometriya

Buyuk nemis geometri Feliks Kleyn simmetriya gʻoyasini ilgari surib har xil geometriyalar qurilishini asoslashni yagona tamoyilni taklif etdi. Kleynning ushbu simmetriya tamoyili gʻoyasi geometriya chegaralaridan ham chiqib, zamonaviy matematikani birlashuvining yagona asosi ekanligini koʻrsatdi. Kleyn ushbu gʻoyalarni 1872 yil Erlangen universiteti senatida maʼruza qildi va tarixda mashxur “Erlangen dasturi” nomini oldi.

Ishbu uslubiy qoʻllanma Geometriya fanining “Akslantirishlar va almashtirishlar” bo`limini nazariy va amaliy jihatdan chuqur o`rganishga bag`ishlangan. Tekislik va fazodagi almashtirishlarning taʼriflari, xossalari va tanlangan holatlardagi analitik ifodalari oʻrganildi. Shuningdek, almashtirishlarning umumlashgan hollari uchun analitik ifodalarini keltirib chiqarish metodikasi bayon qilindi.

To‘plamlarni akslantirish va almashtirish. Almashtirishlar gruppasi va qism gruppasi

Bizga bo‘sh bo‘lmagan X va Y to‘plamlar berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. X to‘plamning har bir x elementiga biror bir qoida bilan Y to‘plamning biror y elementi mos keltirilgan bo‘lsa, X to‘plam Y to‘plamga *akslangan* deyiladi.

Akslantirishda $x \in X$ elementga $y \in Y$ element mos keltirilgan bo‘lsa, y elementga x elementning *obrazi* (aksi), x elementga esa y elementning *proobrazi* (asli) deb ataymiz.

Akslantirish turlari:

- f akslantirishda $\forall x_1, x_2 \in X$ elementlar uchun $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ bo‘lsa, u holda f akslantirish *in’ektiv* akslantirish deyiladi;
- f akslantirishda obrazlar to‘plami Y to‘plamdan iborat, ya’ni $f(X) \to Y$ bo‘lsa, u holda f akslantirishga *sur’ektiv* akslantirish deyiladi;
- bir vaqtning o‘zida ham in’ektiv, ham sur’ektiv bo‘lgan akslantirish *biyektiv* yoki *bir qiymatli* akslantirish deyiladi.

Ta’rif. Biror f biyektiv almashtirishda $\forall x \in X$ element uchun $y = f(x)$ bo‘lib, $f^{'}(y) = x$ munosabat bajarilgan $f^{'}$ akslantirish f akslantirishga *teskari akslantirish* deyiladi.

Ta’rif. Bo‘sh bo‘lmagan X to‘plamni o‘z-o‘ziga biyektiv akslantirish *almashtirish* deyiladi.

Agar f almashtirishda $f(x) = x\,(f(\Phi) = \Phi)$ munosabat bajarilsa, x element (Φ qism to‘plam) f almashtirishning *invariant elementi* deyiladi.

Ta’rif. $\forall x \in X$ element uchun $f(x) = x$ bo‘lsa, f almashtirishga aynan *almashtirish* deyiladi.

Ta’rif. f_1 va f_2 almashtirishlarni ketma-ket bajarishdan hosil bo‘luvchi f_3 almashtirish f_1 va f_2 almashtirishlar ko‘paytmasi deyiladi va $f_3 = f_2 f_1$ ko‘rinishda yoziladi.

Teorema. Almashtirishlarni ko‘paytirish assotsiativlik (guruhlash) qonuniga bo‘ysunadi, ya’ni $f_3(f_2 f_1) = (f_3 f_2) f_1$.

Biror to‘plamdagi f_1, f_2, ... almashtirishlar to‘plamini G bilan belgilaylik.

Ta’rif. G to‘plam elementlari uchun

1. $\forall f_1, f_2 \in G \Rightarrow f_2 f_1 \in G$,
2. $\forall f \in G \Rightarrow f^{-1} \in G$

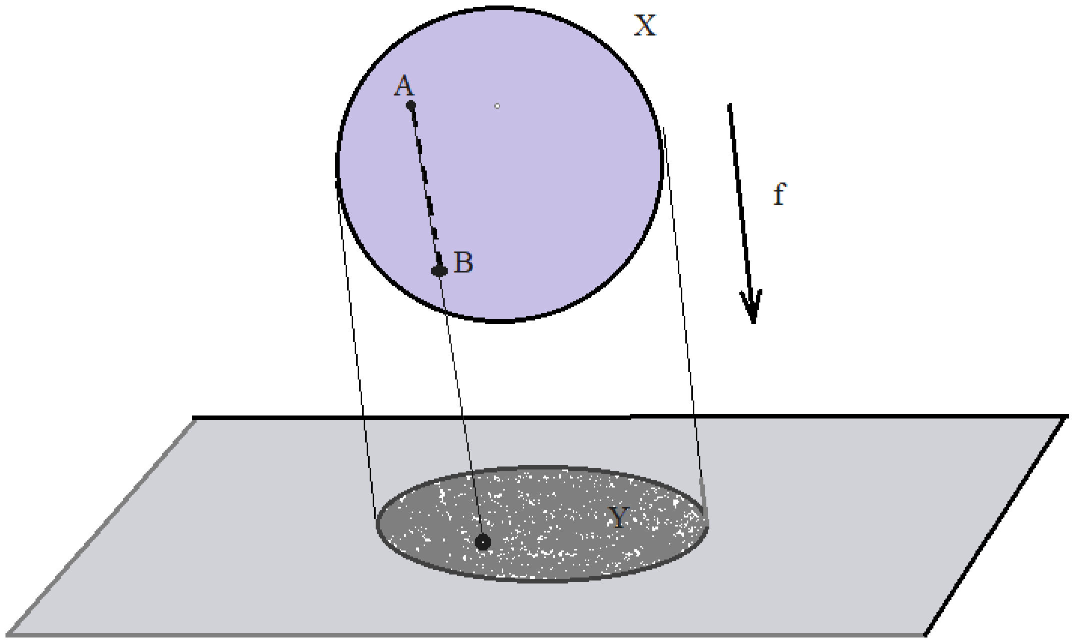
shartlar bajarilsa, G almashtirishlar to‘plami *gruppa* tashkil etadi deyiladi. G gruppa almashtirishlari uchun $f_2 f_1 = f_1 f_2$ shart bajarilsa, G gruppa *kommutativ* yoki *Abel gruppasi* deyiladi.

G_1 to‘plam G to‘plamni qism to‘plami bo‘lib, bu to‘plam uchun yuqoridagi shartlar bajarilsa, G_1 gruppa G gruppaning *qism gruppasi* deyiladi.

1-misol. Koptok (shar) va uning yerdagi soyasini (doira) qaraylik. Koptokka tegishli nuqtalar to`plami $X$, uning tekislikdagi soyasiga tegishli nuqtalar to`plami Y to`plam bo`lsa, X to`plamni $Y$ to`plamga o`tkazuvchi moslik (quyosh nuri yo`nalishi) akslantirish ta’rifiga to`la javob beradi. Demak, ushbu moslik akslantirish bo`lar ekan (1-chizma).

Yuqoridagi moslikning teskarisi, ya’ni, Y to`plamni $X$ to`plamga o`tkazuvchi moslik akslantirish bo`la olmaydi. Chunki, Y to`plamning har bir elementiga $X$ to`plamda bittagina emas cheksiz ko`p nuqtalar mos keladi.

Akslantirish turi sur’yektiv, chunki har bir nuqta yagona obrazga ega va istalgan obrazning proobrazi bo`sh to`plam emas. Akslantirish in’yektiv bo`la olmaydi, chunki nur yo`nalishidagi shar kesmasining turli nuqtalariga birgina nuqta mos keladi.



1-chizma

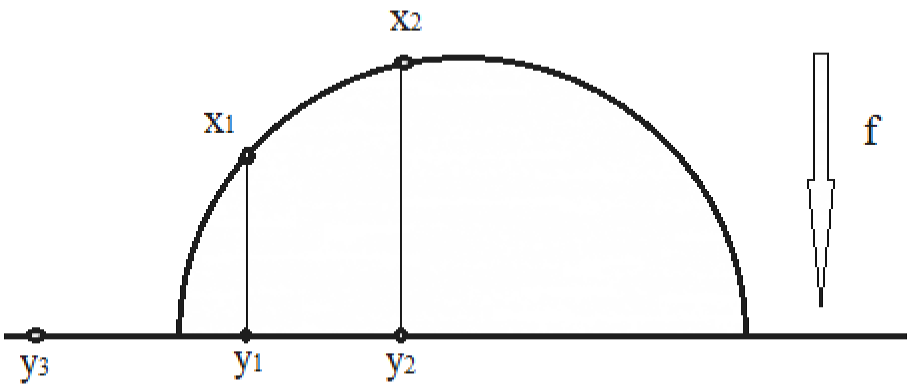
2-misol. Tekislikda biror S markazli $P(S)$ to‘g‘ri chiziqlar dastasi va bu dastaga tegishli bo‘lmagan d to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin. d to‘g‘ri chiziq $P(S)$ to‘g‘ri chiziqlar dastasiga shunday akslantirilganki, undagi har bir M nuqtaga dastaning (SM) to‘g‘ri chizig‘i mos keladi. Akslantirish turini aniqlang.

Yechish. d to‘g‘ri chiziqning turli M va N nuqtalariga dastaning turli (SM) *va* (SN) to‘g‘ri chiziqlari mos kelganligi uchun akslantirish in’ektiv bo‘ladi.

Akslantirish sur’ektiv bo‘la olmaydi, chunki dastaning d to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chizig‘iga d to‘g‘ri chiziqda mos nuqta yo‘q.

3-misol. Markazi to`g`ri chiziqda va shu to`g`ri chiziq bilan chegaralangan yarim aylanaga tegishli nuqtalar X to`plam, to`g`ri chiziqqa tegishli nuqtalar esa Y to`plam bo`lsin. Bu yerda akslantirish yarim aylana nuqtalarini to`g`ri chiziqqa ortogonal proyeksiyalash bo`lsa akslantirish turini aniqlang.

Yechish. Akslantirish in’yektiv bo`ladi, chunki turli proobrazlarga turli obrazlar mos keladi. Akslantirish syur’yektiv bo`la olmaydi, chunki to`g`ri chiziqning diametrdan tashqaridagi nuqtalariga mos proobrazlar yo`q (2-chizma).



2-chizma

Yuqoridagi 3-misolda X to`plam yarim aylana emas, balki aylana nuqtalari, $Y$ to`plam esa uning markazidan o`tuvchi to`g`ri chiziq nuqtalari bo`lsin. Akslantirish to`g`ri chiziqqa ortogonal proyeksiyalash olinsa, ushbu akslantirish inyektiv ham, syur’yektiv ham bo`la olmaydi.

Yuqorida akslantirishlar va ularning turlariga doir misollar ko`rib o`tildi. Akslantirishlarning muhim sinfi almashtirishlar haqida so`z yuritamiz.

4-misol. To‘g‘ri burchakli uchburchak berilgan. Gipotenuzadagi nuqtalar to‘plami X katetdagi nuqtalar to‘plami Y bo‘lsin. Bu yerda akslantirish gipotenuzadagi nuqtalar to‘plamini katetga ortogonal proyeksiyalash bo‘lsin. Akslantirish turini aniqlang.

Yechish. Akslantirish in’ektiv bo‘ladi, chunki gipotenuzadagi turli nuqtalar obrazi katetdagi turli nuqtalarga akslanadi. Akslantirish sur’ektiv ham bo‘ladi, chunki gipotenuzadagi har bir nuqtaning obrazi mavjud va aksincha. Demak, akslantirish biyektiv bo‘lar ekan.

5-misol. Tekislikda $\bar{a}$ vektor berilgan. Tekislikning ixtiyoriy M nuqtasi $\overline{MM'} = \bar{a}$ shart bo‘yicha M' nuqtaga akslangan bo‘lsin. Akslantirish almashtirish ekanini ko‘rsating va unga teskari almashtirishni toping. Qanday shart bajarilganda ayniy almashtirish yuz beradi.

Yechish. Bu akslantirish biyektiv akslantirish ekanligini, shu bilan birga, tekislikning har bir nuqtasiga yana shu tekislikka tegishli nuqta mos keltirilganidan akslantirish almashtirish ekanligini aytish mumkin. Almashtirishga teskari almashtirish mavjud bo‘lib bu $-\bar{a}$ vektor qadar siljitishdir. Shuningdek, $\bar{a}$ vektor nol vektor bo‘lganida ayniy almashtirish hosil bo‘ladi.

6-misol. G to‘plam l to‘g‘ri chiziqqa parallel barcha vektorlar bo‘yicha siljitishlar to‘plami bo‘lsin. G to‘plam gruppa hosil qiladimi?

Yechish. Noldan farqli $\bar{a}$ *va* $\bar{b}$ vektorlar l o‘qqa parallel bo‘lsin. Bu almashtirishlarni mos ravishda $T_{\bar{a}}, T_{\bar{b}}$ deb olsak, bu almashtirishlarni ketma-ket bajarish, ya’ni ularni ko‘paytmasi $\bar{a}+\bar{b}=\bar{c}$ vektor qadar siljitish $T_{\bar{c}}$ almashtirishdan iborat bo‘lib, bu yerda $\bar{c}$ vektor ham l o‘qqa parallel bo‘ladi. $\bar{a}$ vektor bo‘yicha siljitishga teskari almashtirish -$\bar{a}$ vektor bo‘yicha siljitish bo‘lib, $-\bar{a}\,//\,l$ bo‘ladi.

Demak, l o‘qqa parallel ko‘chirishlar to‘plami gruppa tashkil qilar ekan.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Konsert zali 1200 kishiga mo‘ljallangan. Konsertga 1176 ta bilet sotildi. Bilet egalari konsertga qannashdi desak, ular bilan o‘rindiqlar orasidagi moslik qanday akslantirish bo‘ladi?
2. Tekislikda $\{O,\bar{i},\bar{j}\}$ reper berilgan bo‘lsin. Tekislikning istalgan M nuqtasiga $f: M(x,y) \to M^{'}(-x,-y)$ shart bo‘yicha $M^{'}$ mos keltirilgan bo‘lsin.
   a) bu akslantirish almashtirish ekanligini ko‘rsating;
   b) almashtirishning invariant nuqtasi bormi?
   c) bu almashtirishda $y=kx$ to‘g‘ri chiziq, $(x-3)^2+y^2=7$ aylananing akslarini toping.
3. σ tekislikda d to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin. f akslantirish σ tekislikning har bir M nuqtasiga undan d to`g`ri chiziqqa tushirilgan MN perpendikulyarning o‘rtasi $M^{'}$ ni mos keltirsin. Bu moslik almashtirish ekanini ko‘rsating, unga teskari almashtirishni toping.
4. Tekislikda $d_1 \perp d_2$ to‘g‘ri chiziqlar berilgan. Tekislikning ixtiyoriy nuqtasi ketma-ket, bu ikki to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirilgan: $f_1(M)=M^{'}$, $f_2(M^{'})=M^{''}$. Ushbu $f_2 f_1 = f(M)=M^{''}$ almashtirish $O=d_1 \cap d_2$ nuqtaga nisbatan markaziy simmetrik almashtirish ekanini isbot qiling.
5. Aylanada quyidagi shartlarga mos akslantirishlarga misol keltiring:
   a) invariant nuqtalarga ega bo‘lmagan;
   b) ikki invariant nuqtaga ega bo‘lgan.

6. Tekislikda ikkita AB va CD kesmalar berilgan. AB kesmani CD kesmaga mos keltiruvchi biyektiv akslantirish mavjud ekanini isbotlang.
7. Akslantirish $y=x^2$ ko`rinishdagi munosabat bilan berilgan bo`lsa akslantirish turini aniqlang.

I. TEKISLIKDA ALMASHTIRISHLAR
Harakat va uning turlari

Ta'rif. Tekislikning ikki nuqtasi orasidagi masofasini o'zgartirmaydigan almashtirish *harakat* deyiladi.

Harakatning asosiy xossalari:

a) kesma kesmaga o'tadi;
b) to'g'ri chiziq to'g'ri chiziqqa o'tadi;
c) burchak kattaligi saqlanadi;
d) uchta nuqtani oddiy nisbai o'zgarmaydi;
e) dekart sistemalari yana dekart sistemalariga o'tadiki, bunda mos nuqtalarni ularga nisbatan koordinatalari o'zgarmaydi.

Tekislikdagi harakat quyidagi analitik ko'rinishda beriladi:

$$F:\begin{cases} x' = x\cos\alpha - \varepsilon y\sin\alpha + x_0, \\ y' = x\sin\alpha - \varepsilon y\cos\alpha + y_0. \end{cases} \quad (1)$$

Bu yerda $\varepsilon = 1$ bo'lsa (1) formulalar birinchi tur harakatni, $\varepsilon = -1$ bo'lsa ikkinchi tur harakatni ifodalaydi. Demak, almashtirish formulalaridagi x va y oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan ikkinchi tartibli determinant musbat bo'lsa oriyentatsiya saqlanadi, manfiy bo'lsa oriyentatsiya saqlanmaydi. Agar determinant ± 1 bo'lsa almashtirish harakatni ifoda qilar ekan.

Ta'rif. Tekislikning har bir M nuqtasiga $\overline{MM'} = \bar{a}$ shartni qanoatlantiruvchi M' nuqtasini mos keltiruvchi almashtirish tekislikda $\bar{a}$ vektor qadar *parallel ko'chirish* deyiladi va $T_{\bar{a}}$ ko'rinishda ifodalanadi. $\bar{a} = \{a, b\}$ vektor qadar parallel ko'chirish

$$T_{\bar{a}}:\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b \end{cases} \quad (2)$$

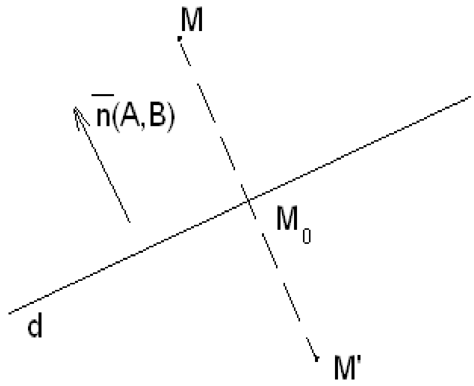
ko'rinishdagi analitik ifoda bilan beriladi.

Ta'rif. Tekislikning har bir M nuqtasiga l to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo'lgan M' nuqtasini mos keltiruvchi almashtirish tekislikda l to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirish yoki *l o'qli simmetriya* deb ataladi va S_l ko'rinishda ifodalanadi.

l o'qli simmetriyada l o'q sifatida mos ravishda OX, OY lar olinganda almashtirish formulalari quyidagicha bo'ladi:

$$S_{OX}:\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y \end{cases} \quad va \quad S_{OY}:\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y. \end{cases} \quad (3)$$

O'qli simmetriya uchun yuqoridagi formulalar xususiy hol hisoblanadi. Simmetriya o'qi sifatida istalgan *d:* $Ax + By + C = 0$ to'g'ri chiziq olinganda o'qli simmetriyaning umumiy formulasini keltirib chiqaraylik. $M(x,y)$ nuqta tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lib, uning S_d o‘qli simmetriyadagi obrazi $M^{'}(x^{'},y^{'})$ nuqta bo‘lsin. Bu yerda $x^{'}, y^{'}$ larni x, y lar orqali analitik ifodalanishini topish talab etiladi. Buning uchun quyidagi ikki faktdan foydalanamiz (3-chizma):



3-chizma

1. $MM^{'}$ kesmaning o‘rtasi $M_0((x+x^{'})/2,(y+y^{'})/2)$ d to‘g‘ri chiziqqa tegishli;

2. d to‘g‘ri chiziq normal vektori $\bar{n}(A,B)$ va $\overline{MM^{'}}$ vektorlar kollinear.

Bu yerdagi ikki fakt bizga x, y noma’lumlarga nisbatan ushbu chiziqli tenglamalar sistemani tuzishimizga yordam beradi:

$$\begin{cases} A\left(\dfrac{x+x^{'}}{2}\right)+B\left(\dfrac{y+y^{'}}{2}\right)+C=0, \\ \dfrac{x^{'}-x}{A}=\dfrac{y^{'}-y}{B} \quad . \end{cases} \tag{4}$$

(4) tenglamalar sistemasini $x,\ y$ noma’lumlarga nisbatan yechsak,

$$S_d:\begin{cases} x^{'}=\dfrac{B^2-A^2}{A^2+B^2}x-\dfrac{2AB}{A^2+B^2}y-\dfrac{2AC}{A^2+B^2}, \\ y^{'}=-\dfrac{2AB}{A^2+B^2}x+\dfrac{A^2-B^2}{A^2+B^2}y-\dfrac{2BC}{A^2+B^2}. \end{cases} \tag{5}$$

formulalarga ega bo‘lamiz. (5) formulalar o‘q simmetriyasining o‘q sifatida istalgan $Ax+By+C=0$ to‘g‘ri chiziqni olgandagi analiik ifodasi bo‘ladi.

Bizga tekislikda *O* nuqta va α oriyentirlangan burchak berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. Tekislikdagi har bir *M* nuqtaga uning

1. $\rho(O,M)=\rho(O,M^{'})$;

2. $\angle MOM^{'}=\angle\alpha$;

shartlarni qanoatlantiruvchi M' nuqtaga mos keltiruvchi almashtirish tekislikda *O* nuqta atrofida α burchakka *burish* deyiladi. Bu yerda *O* nuqta *burish markazi*, α esa *burish burchagi* deyiladi. Burish R_O^α ko‘rinishda ifodalanadi.

Burish markazi *O(0,0)* nuqtada, burish burchagi α bo‘lgan burish quyidagi analitik ifoda bilan beriladi:

$$R_O^\alpha:\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \ . \end{cases} \tag{6}$$

Burish markazi tekislikning istalgan *A(a,b)* nuqtasida va burish markazi α bo‘lgan umumiy holni analitik ifodasini opish masalasini qaraylik. Buning uchun (2) va (6) formulalardan foydalanish mumkin. Ya’ni, avval $-\bar{a}(-a,-b)$ parallel ko‘chirishni, (6) formula bo‘yicha burishni va nihoyat $\bar{a}(a,b)$ vektor qadar parallel ko‘chirishni bajaramiz. Bu almashtirishlar ketma-ketligi biz kutgan burishni amalga oshiradi va $T_{\bar{a}}R_O^\alpha T_{-\bar{a}}$ ko‘rinishdagi almashtirishlar ko‘paytmasi shaklida ifodalaydi:

$$R_A^\alpha:\begin{cases} x' = (x-a)\cos\alpha - (y-b)\sin\alpha + a, \\ y' = (x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha + b. \end{cases} \tag{7}$$

Ta’rif. Tekislikda *O* nuqta atrofida 180^0 ga burish *O markazli simmetriya* deb ataladi. Markaziy simmetriya Z_O ko‘rinishda belgilanadi.

Markaziy simmetriya burish ekanligidan (6) formulaga $\alpha = 180^0$ qiymatni qo‘yish bilan uning analitik ifodasini keltirib chiqarish mumkin. Simmetriya markazi *O(0,0)* va *A(a,b)* nuqtalarda bo‘lganda mos ravishda (6) va (7) formulalarga asosan tegishli analitik ifodalarni hosil qilamiz:

$$Z_O:\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y \end{cases} \qquad va \qquad Z_A:\begin{cases} x' = -(x-a)+a, \\ y' = -(y-b)+b. \end{cases} \tag{8}$$

Bizga biror l o‘q va $l \,//\, \bar{p}$ $(\bar{p} \neq \bar{0})$ vektor berilgan.

Ta’rif. $f = T_{\bar{p}}S_l$ almashtirish tekislikning *sirpanuvchi simmetriyasi* deyiladi.

Sirpanuvchi simmetriyaning analitik ifodaini quyidagi sodda hol uchun keltirib chiqaraylik. Simmetriya o‘qi sifatida *Ox* o‘qini, $\bar{p}$ vektor sifatida esa *Ox* ga parallel istalgan $\bar{p} = \{x_0, 0\}$ vektorni olamiz. Tekislik nuqtalarini avval S_{Ox}, so‘ngra $T_{\bar{p}}$ harakatlar yordamida almashtiramiz:

$$S_{Ox}:\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y \end{cases} \quad va \quad T_{\bar{p}}:\begin{cases} x'' = x' + x_0 \\ y'' = y' \end{cases}$$

ekanligidan, sirpanuvchi simmetriyaning analitik ifodasini yozishimiz mumkin:

$$f:\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = -y \end{cases} \tag{9}$$

Sirpanuvchi simmetriyaning umumiy holdagi analitik ifodasini topish masalasini qaraylik. Bizga l o‘q $Ax+By+C=0$ tenglama bilan unga parallel vektor esa $\overline{p}=\{kB,kA\},\ (k\in Z)$ ko‘rinishda berilgan bo‘lsin. $f=T_{\overline{p}}S_i$ sirpanuvchi simmetriyani hosil qilish uchun avval o‘q simmetriyasini (5) formula bilan, so‘ngra parallel ko‘chirishni (2) formulalar bilan bajaramiz. Ya’ni,

$$S_l:\begin{cases} x' = \dfrac{B^2-A^2}{A^2+B^2}x-\dfrac{2AB}{A^2+B^2}y-\dfrac{2AC}{A^2+B^2}, \\ y' = -\dfrac{2AB}{A^2+B^2}x+\dfrac{A^2-B^2}{A^2+B^2}y-\dfrac{2BC}{A^2+B^2}, \end{cases} \qquad (10)$$

$$T_{\overline{p}}:\begin{cases} x'' = x'+kB, \\ y'' = y'+kA. \end{cases}$$

(10) formulalardan sirpanuvchi simmetriyaning umumiy holdagi analitik ifodasini yozamiz:

$$f:\begin{cases} x' = \dfrac{B^2-A^2}{A^2+B^2}x-\dfrac{2AB}{A^2+B^2}y-\dfrac{2AC}{A^2+B^2}+kB, \\ y' = -\dfrac{2AB}{A^2+B^2}x+\dfrac{A^2-B^2}{A^2+B^2}y-\dfrac{2BC}{A^2+B^2}+kA. \end{cases} \qquad (11)$$

Teorema. Istalgan birinchi tur harakat parallel ko‘chirish, yoki burish, yoki markaziy simmetriyadir.

Teorema. Istalgan ikkinchi tur harakat o‘q simmetriyasi yoki sirpanuvchi simmetriyadir.

1-misol. $y=3x+5$ tog`ri chiziqqa (*Ox*) va (*Oy*) o`qqa nisbatan simmetrik bo`lgan figuralarning tenglamalarini toping.

Yechish. (*Ox*) o`qqa nisbatan simmerik almashtirish formulalaridan *x* va *y* larni topamiz: $\begin{cases} x` = x \\ y` = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x` \\ y = -y` \end{cases}$. Topilgan *x* va *y* larning qiymatlarini berilgan to`gri chiziq tenglamasiga quyamiz va ixchamlaymiz: $-y` = 3x` + 5 \Rightarrow y = -3x - 5$.

Xuddi shu kabi (*Oy*) o`qiga nisbatan ham simmetrik almashtirishni bajaramiz. $\begin{cases} x` = -x \\ y` = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x` \\ y = y` \end{cases}$. Topilganlarni to`g`ri chiziq tenglamasiga keltirib qo`yamiz: $y` = -3x` + 5$.

Eslatma. Istalgan almashtirish formulalari berilgan bo`lsa, figura tenglamasiga ko`ra uning obrazi tenglamasini topish uchun, almashtirishdagi *x* va *y* larni *x`* va *y`* lar orqali ifodasi topiladi. Topilgan ifodalar figura tenglamasidagi mos o`rinlariga qo`yiladi va ixchamlanib tegishli obraz tenglamasi aniqlanadi.

2-misol. *d* o`qi *x+7=0* to`g`ri chiziqdan iborat, ko`chirish vektori $\vec{p}=\{0;3\}$ bo`lgan sirpanuvchi simmetriyaning analitik ifodasini toping.

Yechish. Ushbu masalani yechishda topilgan umumiy formula (11) dan foydalanamiz. Bu yerda *A=1, B=0, C=7, k=3* qiymatlarni (11) formulalarga keltirib qo`yamiz: $\begin{cases} x` = -x - 7, \\ y` = y + 3. \end{cases}$

3-misol. *O* va *O`* markazli markaziy simmetriyalar ko`paytmasi $Z_{O`}.Z_O$ qanday harakat bo`ladi?

Yechish . *O va O`* nuqtalar mos ravishda *O(a,b)* va *O`(c,d)* koordinatalarga ega bo`lsin. U holda ular bilan bog`liq markaziy simmetriyalar mos ravishda

$$Z_O : \begin{cases} x' = -x + 2a, \\ y' = -y + 2b \end{cases} \quad va \quad Z_{O`} : \begin{cases} x' = -x + 2c, \\ y' = -y + 2d. \end{cases}$$

ko`rinishda bo`ladi. Ushbu ikki almashtirishning ko`paytmasini topamiz:

$$Z_{O`}.Z_O = \begin{cases} x` = x + 2a + 2c, \\ y` = y + 2b + 2d. \end{cases}$$

Bu almashtirish kochirish vektori $\vec{p}(2a + 2c; 2b + 2d) = 2\overrightarrow{OO`}$ bo`lgan parallel ko`chirishni ifodalaydi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Tekislikda kesishuvchi d_1, d_2 to‘g‘ri chiziqlar berilgan. Tekislikning ixtiyoriy nuqtasi ketma-ket, bu ikki to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirilgan: $f_1(M) = M^{'}$, $f_2(M^{'}) = M^{''}$. Ushbu $f_2 f_1 = f(M) = M^{''}$ almashtirish $O = d_1 \cap d_2$ nuqta atrofida $\phi = 2(d_1 \hat{} d_2)$ burchakka burish ekanligini isbot qiling.
2. Tekislikda berilgan *M* nuqtaga biror *O* markazli dastaning har bir chizig‘iga nisbatan simmetrik bo‘lgan nuqtalar to‘plami *O* nuqtadan baravar uzoqlikda yotishini isbot qiling.
3. Tekislikning barcha o‘qli simmetriyalari to‘plami guruh tashkil etishini isbot qiling.
4. Teng yonli trapetsiyada uning yon tomonlari yotgan to‘g‘ri chiziqlar kesishgan nuqta, diagonallari kesishgan nuqta va asoslarining o‘rtalari bir to‘g‘ri chiziqda yotishini isbot qiling.
5. $3x - y + 2 = 0$ *va* $5x - y + 5 = 0$ to‘g‘ri chiziqlarda shunday ikkita M_1, M_2 nuqtani topingki, ular orasidagi masofa 5 birlikka teng bo‘lsin va $\overline{M_1 M_2} = \bar{i}$ bo‘lsin.
6. Berilgan nuqta atrofida burishlar to‘plami guruh hosil qilishini isbotlang.
7. *ABC* muntazam uchburchakning markazi *O* nuqtadan o‘zaro 60^0 li burchak hosil qiluvchi ikki to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. Bu to‘g‘ri chiziqlarning uchburchak ichiga joylashgan kesmalari kongurent bo‘lishini isbot qiling.
8. Simmetriya o‘qi $2x - y + 3 = 0$ to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘lgan o‘qli simmetriya analitik ifodasini toping va bundan foydalanib $y = \frac{3}{x}$ giperbolani aksini toping.
9. Tekislikda *A* va *B* nuqtalar berilgan. Shu nuqtalar simmetriya markazi bo‘lgan ikki markaziy simmetriya ko‘paytmasi parallel ko‘chirish ekanini isbot qiling va ko‘chirish vektorini toping.
10. Parallel ko‘chirish bilan markaziy simmetriya ko‘paytmasi biror markazli markaziy simmetriya ekanini isbotlangyu
11. Tekislikda markazlari turli nuqtalardan iborat uchta markaziy simmetriya ko‘paytmasi yana markaziy simmetriya ekanini isbot qiling va simmetriya markazini toping.

12. $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1, \\ y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 15 \end{cases}$ formulalar bilan berilgan harakat $\left(\frac{-31}{2}, -\frac{13}{2}\right)$ nuqta atrofida burish ekanini isbot qiling.

13. $\begin{cases} x' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{21}{5}, \\ y' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{13}{5} \end{cases}$ formulalar bilan berilgan harakat o‘qli simmetriya ekanini isbot qiling.

14. Simmetriya o‘qi $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziqdan iborat o‘q simmetriyasi analitik ifodasini toping.

15. Simmetriya o‘qi l va m to‘g‘ri chiziq tenglamalari berilgan. M to‘g‘ri chiziqni S_l o‘q simmetriyasidagi obrazini toping:
   1) $l: x + y + 1 = 0,$ $m: 2x - y - 2 = 0;$
   2) $l: -x + y = 0,$ $m: x - 2y + 1 = 0.$

16. O‘qlari $x = 0,\ y = 0,\ x - 2y = 0$ to‘g‘ri chiziqlardan iborat uchta o‘q simmetriyasining ko‘paytmasini toping.

17. l to‘g‘ri chiziqni M nuqta atrofida φ burchakka burishdagi obrazini toping:
   1) $M(0,0),\quad \varphi = \frac{\pi}{2},\quad l: x + y - 2 = 0;$
   2) $M(-2,1),\quad \varphi = \frac{\pi}{6},\quad l: x - y + 1 = 0;$
   3) $M(0,-1),\quad \varphi = \frac{\pi}{4},\quad l: x + 2y = 0.$

18. d o‘qi va ko‘chirish vektori berilgan sirpanuvchi simmetriyaning analitik ifodasini toping:
   1) $d: x - 2 = 0,$ $\bar{a}(0,3);$
   2) $d: x + y - 3 = 0,$ $\bar{a}(-1,1);$
   3) $d: y + 5 = 0,$ $\bar{a}(2,0);$
   4) $d: 2x - y + 1 = 0,$ $\bar{a}(2,4);$

19. $x' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + 4,\quad y' = \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y$ formulalar bilan berilgan sirpanuvchi simmetriyaning invariant to‘g‘ri chizig‘ini toping.

20. Simmetriya o‘qlari parallel bo‘lgan ikkita sirpanuvchi simmetriyaning ko‘paytmasi parallel ko‘chirish ekanini isbotlang.

21. Simmetriya o‘qlari perpendikulyar bo‘lgan ikkita sirpanuvchi simmetriyaning ko‘paytmasi markaziy simmetriya ekanini isbotlang.
22. Simmetriya o‘qlari kesishuvchi ikkita sirpanuvchi simmetriyaning ko‘paytmasi burish ekanini ekanini isbotlang va burish markazini toping.
23. Bizga ABC va $A'B'C'$ uchburchaklar uchlarining koordinatalari berilgan: $A(2,-3),\ B(5,1),\ C(0,1),\ A'(-3,1),\ B'(1,4),\ C'(-19/5, 27/5)$.
Uchburchaklarni kongurent ekanligini isbotlang. ABC uchburchakni $A'B'C'$ uchburchakka o‘tkazuvchi harakat analitik ifodasini toping.
24. Burish markazlari turli nuqtalarda bo‘lgan ikki α va β burchaklarga burishlar ko‘paytmasi $\alpha+\beta \neq 360^0$ bo‘lganda burish, $\alpha+\beta = 360^0$ bo‘lganda $(0^0 \leq \alpha < 360^0,\ 0^0 \leq \beta < 360^0)$ parallel ko‘chirish ekanini isbotlang.
25. Ikkita burish ko‘paytmasi kommutativlik xossasiga bo‘ysunishi uchun, burish markazlari ustma-ust tushishi zarur va yetarli ekanini isbotlang.
26. Simmetriya o‘qlari bitta S markazli dastaga tegishli uchta to‘g‘ri chiziqdan iborat o‘q simmetriyalari ko‘paytmasi, simmetriya o‘qi shu dastaga tegishli o‘q simmetriyasi ekanini isbotlang.

O‘xshash almashtirishlar. Gomotetiya

$k>0$ haqiqiy son berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. Tekislikning ixtiyoriy M va N nuqtasiga $\rho(M^{'},N^{'})=k\rho(M,N)$ shartni qanoatlantiruvchi $M^{'},N^{'}$ nuqtalarni mos keltiruvchi almashtirish tekislikda $k>0$ koeffitsiyentli *o‘xshashlik almashtirishi* deyiladi va ρ^{k} ko‘rinishda belgilanadi.

Ta’rif. Φ figurani $\Phi^{'}$ figuraga $k>0$ koeffitsiyentli biyektiv akslantirish mavjud bo‘lsa, $\Phi^{'}$ figura Φ figuraga $k>0$ koeffitsiyentli o‘xshash deyiladi.

Ta’rif. Tekislikning har bir M nuqtasiga $\overline{SM^{'}}=k\overline{SM}$ shartni qanoatlantiruvchi $M^{'}$ nuqtani mos keltiruvchi almashtirish k koeffitsiyentli va S markazli *gomotetiya* deyiladi. Bu yerda S nuqta gomotetiya markazi, k esa gomotetiya koeffitsiyenti deyiladi. Gomotetiya H_S^k ko‘rinishda ifodalanadi.

Gomotetiyada $k=1$ bo‘lsa aynan almashtirish, $k=-1$ bo‘lsa markaziy simmetriya bo‘ladi. Gomotetiyada to‘g‘ri chiziq o‘ziga parallel to‘g‘ri chiziqqa o‘tadi, burchak kattaligi saqlanadi, uchta nuqtani oddiy nisbati o‘zgarmaydi, kesma uzunligi k marta o‘zgaradi.

H_S^k gomotetiyaga teskari almashtirish $\frac{1}{k}$ koeffitsiyentli gomotetiya bo‘ladi.

Dekart reperida koordinatalar boshi *O(0,0)* gomotetiya markazi, k gomotetiya koeffitsiyenti bo‘lsa, almashtirish formulalari ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$H_o^k:\begin{cases}x'=k\,x,\\ y'=k\,y.\end{cases} \tag{1}$$

Gomotetiya markazi istalgan *A(a,b)* nuqtada va gomotetiya koeffitsiyenti k bo‘lganda almashtirish formulalari $T_{\overline{OA}}H_o^kT_{\overline{AO}}$ almashtirishlarning ko‘paytmasidan kelib chiqadi:

$$H_A^k=T_{\overline{OA}}H_o^kT_{\overline{AO}}:\begin{cases}x'=k(x-a)+a,\\ y'=k(y-b)+b.\end{cases} \tag{2}$$

Teorema. $k>0$ koeffitsiyentli o‘xshashlik almashtirishi shu koeffitsiyentli gomotetiya bilan harakatning ko‘paytmasiga teng:

$$p_k=H^k\ f\,. \tag{3}$$

O‘xshashlik almashtirishi gomotetiya va harakat ko‘paytmasi ekanligidan, ularning umumiy xossalari o‘xshashlik almashtirishida saqlanadi: to‘g‘ri chiziq to‘g‘ri chiziqqa, parallel kesmalar yana parallel kesmalarga o‘tadi, burchak kattaligi saqlanadi, uchta nuqtani oddiy nisbati o‘zgarmaydi.

Tekislikda o‘xshashlik almashtirishi analitik ifodasi quyidagi bo‘ladi:

$$p^k:\begin{cases} x' = k(x\cos\alpha - \varepsilon y\sin\alpha) + a, \\ y' = k(x\sin\alpha + \varepsilon y\cos\alpha) + b, \end{cases} \quad (4)$$

bu yerda $\alpha = (\bar{i}, \bar{i}')$, $O(a,b)$. Agar $\varepsilon = 1$ bo‘lsa o‘xshashlik almashtirishi I tur, $\varepsilon = -1$ bo‘lsa o‘xshashlik almashtirishi II tur deyiladi.

1-misol. $\begin{cases} x` = 3x, \\ y` = 3y \end{cases}$ formulalar bilan berilgan gomotetiyada $(x-1)^2 + (x-3)^2 = 24$ aylananing obrazini toping.

Yechish. Almashtirish formulalaridan $x = \frac{x`}{3}$, $y = \frac{y`}{3}$ ekanligini aniqlaymiz va bu ifodalarni aylana tenglamasiga qo`yamiz:

$$(\frac{x`}{3} - 1)^2 + (\frac{y`}{3} - 3)^2 = 24 \Rightarrow (x` - 3)^2 + (x` - 9)^2 = 216.$$

Berilgan aylananing obrazi yana aylana bo`lib, radiusi 3 martaga oshganini ko`rishimiz mumkin.

2-misol. $\begin{cases} x` = kx + a, \\ y` = ky + b \end{cases}$ formulalar bilan berilgan almashtirishning gomotetiya ekanligini isbotlang va gomotetiya markazini toping.

Yechish. Gomotetiya markazi qo`zg`almas nuqta ekanligidan uni qidiramiz:

$$\begin{cases} x` = kx + a, \\ y` = ky + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{1-k}, \\ y = \dfrac{b}{1-k}. \end{cases}$$

Demak, $O(\frac{a}{1-k}; \frac{b}{1-k})$ nuqta qo`zg`almas ekanligidan, bu nuqta gomotetiya markazi bo`ladi. Almashtirish formulasini (2) formulaga moslashtiradigan bo`lsak, gomotetiya koeffitsiyentini k deyishimiz mumkin.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Gomotetiya nimalar yordamida beriladi?
2. Gomotetiyada invariant nuqtalar va to‘g‘ri chiziqlarni ko‘rsating.
3. $x' = -2x, \quad y' = -2y$ formulalar bilan berilgan gomotetiyada:

   1) $x - y + 5 = 0$ va $y = 2x$ to‘g‘ri chiziqlarning;

   2) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 24$ va $x^2 + y^2 = 1$;

   3) uchlari *A(1,3), B(-2,5), C(0,1)* nuqtalarda yotgan uchburchakning obrazlarini toping.
4. H_o^k gomotetiyaning markazi *O(a,b)* bo‘lsa, gomotetiya formulalarini aniqlang.
5. $x' = kx + a, \quad y' = ky + b$ formulalar bilan berilgan almashtirish gomotetiya ekanini isbotlang, gomotetiya markazi va koeffitsiyentini toping.
6. Markazi *O(3,6)* nuqtada yotgan gomotetiyaning bir juft mos nuqtalari *A(6, 12), $A^{/}$(2,4)* berilgan. Gomotetiya formulalarini toping.
7. $2x + y - 4 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa A nuqta, $3x - y + 2 = 0$ to‘g‘ri chiziqda B nuqta olingan va $H_o^{-2}(A) = B$ ekani ma’lum bo‘lsa, bu nuqtalarning koordinatalarini toping.
8. Umumiy markazli va tomonlari mos ravishda parallel bo‘lgan ikki kvadrat berilgan. Ularni birini ikkinchisiga o‘tkazish uchun qanday gomotetik almashtirishni bajarish kerak.
9. Kongurent bo‘lmagan ikki aylanani bir-biriga o‘tkazuvchi ikki gomotetiya bor ekanini va ularni koeffitsiyentlarining yig‘indisi nolga tengligini isbotlang.
10. Gomotetiya markazi *A* va koeffitsiyenti k_1 hamda gomotetiya markazi *B* va koeffitsiyenti k_2 bo‘lgan ikki gomotetiya ko‘paytmasi

    a) $k_1 k_2 \neq 1$ bo‘lganida gomoteiya;

    b) $k_1 k_2 = 1$ va $A \neq B$ bo‘lganida parallel ko‘chirish;

    c) $k_1 k_2 = 1$ va $A = B$ bo‘lganida ayniy almashtirish ekanini isbotlang.
11. Ushbu $A(1,2) \to A_1(2,0), \ B(-2,3) \to B_1(0,0)$ moslik birinchi tur o‘xshashlik almashtirish ekanini bilgan holda almashtirish formulalarini toping. Invariant nuqtalarni va o‘xshashlik koeffitsiyentini toping.

Affin almashtirish

Tekislikda ikkita $B(O,\bar{e}_1,\bar{e}_2)$, $B'(O',\bar{e}_1^{/},\bar{e}_2^{/})$ affin reperlari berilgan bo‘lsin. *B* da koordinatalari *x, y* bo‘lgan *M* nuqtaga $B^{/}$ da xuddi shu koordinatali $M^{/}$ nuqtani mos keltiruvchi almashtirish tekislikda *affin almashtirish* deyiladi va *A* ko‘rinishda ifodalanadi.

Agar $B(O,\bar{e}_1,\bar{e}_2)$, $B'(O',\bar{e}_1^{/},\bar{e}_2^{/})$ reperlar bir oriyentatsiyali bo‘lsa, affin almashtirishi I tur, turli oriyentatsiyali bo‘lsa, II tur deyiladi.

Affin almashtirish quyidagi xossalarga ega:

- affin almashtirishda to‘g‘ri chiziqning obrazi to‘g‘ri chiziq bo‘ladi.
- affin almashtirishda paralel to‘g‘ri chiziqlarning obrazi parallel to‘g‘ri chiziqlar bo‘ladi.
- affin almashtirishda to‘g‘ri chiziqda yotuvchi uchta nuqtaning oddiy nisbati saqlanadi.
- figuralar yuzlarining nisbati saqlanadi.

Ta’rif. Agar tekislikdagi ikki figuradan birini ikkinchisiga o‘tkazuvchi affin almashtirishi mavjud bo‘lsa, bu figuralar *affin ekvivalent figuralar* deyiladi.

Affin almashtirishi formulalari

$$A:\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + b \end{cases} \qquad (1)$$

ko‘rinishda bo‘lib, $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{221} \end{vmatrix} \neq 0$, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a, b \in R$ bo‘ladi. () formulalar haqiqatan affin almashtirishni ifoda etishini isbotlash uchun ushbu formulalarga nisbatan affin almashtirishning xossalarini tekshirib ko‘rish mumkin. Masalan, bizga B reperda aniqlangan biror $Ax + By + C = 0$ tenglama bilan berilgan to‘g‘ri chiziqni qaraylik. Biz bu yerda $Ax + By + C = 0$ to‘g‘ri chiziqning obrazi yana biror to‘g‘ri chiziq ekanini ko‘rsatishimiz yetarli. (1) sistemani *x* va *y* larga nisbatan yechamiz:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a_{11}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} x^{/} + \dfrac{a_{12}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} y^{/} - \dfrac{\begin{vmatrix} a_{12} & a \\ a_{22} & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \\ x = \dfrac{a_{21}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} x^{/} + \dfrac{a_{22}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} y^{/} + \dfrac{\begin{vmatrix} a & a_{11} \\ b & a_{21} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \end{cases} \qquad (3)$$

(3) dan *x* va *y* larning qiymatlarini $Ax + By + C = 0$ ga qo‘yib ixchamlasak,

$$\frac{(Aa_{22}-Ba_{21})}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}x' + \frac{(Ba_{11}-Aa_{21})}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}y' + \frac{A\begin{vmatrix} a_{12} & a \\ a_{22} & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} + \frac{B\begin{vmatrix} a & a_{11} \\ b & a_{21} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} + C = 0 \qquad \text{yoki}$$

$$(Aa_{22}-Ba_{21})x' + (Ba_{11}-Aa_{12})y' + \left(A\begin{vmatrix} a_{12} & a \\ a_{22} & b \end{vmatrix} + B\begin{vmatrix} a & a_{11} \\ b & a_{21} \end{vmatrix} + C\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right) = 0. \quad (4)$$

(4) tenglama to‘g‘ri chiziqni ifoda etganligidan (3) formulalarni affin almashtirish formulalari ekanligini tasdiqlash mumkin.

1-misol. Quyidagi almashtirishning invariant nuqtasini toping:

$$\begin{cases} x' = 4x + 5y - 11, \\ y' = 2x + 4y - 7. \end{cases}$$

Yechish. Ma’lumki, *M(x,y)* nuqta invariant nuqta bo`lsa, uning obrazi *M`* nuqta ham shu koordinatalarga ega bo`ladi. Bunday nuqta bor yoki yo`qligini bilish uchun quyidagi tenglamalar sistemasini yechamiz:

$$\begin{cases} x = 4x + 5y - 11, \\ y = 2x + 4y - 7. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 5y - 11 = 0 \\ x + 4y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 6\frac{1}{17}, \;\; y = \frac{4}{17}.$$

Demak, $M'\left(6\frac{1}{17}, \frac{4}{17}\right)$ nuqta affin almashtirishning invariant (qo`zg`almas) nuqtasi bo`lar ekan.

2-misol. Affin almashtirishda muntazam uchburchak, kvadrat va to`g`ri to`rtburchakning obrazlari qanday figura bo`ladi.

Yechish. Affin almashtirish xossalarini hisobga olib muntazam uchburchakni obrazi ixtiyoriy uchburchak, kvadratni (to`g`ri to`rtburchakni ham) obrazi parallelogramm bo`ladi. Chunki, parallel to`g`ri chiziqlarning obrazi yana parallel to`g`ri chiziqlarga o`tadi, burchak kattaligi saqlanmaydi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Affin almashtirishda to`g`ri chiziqdagi uchta nuqtaning oddiy nisbati saqlanishini isbotlang.
2. Affin almashtirish quyidagi formulalar yordamida berilgan

$$\begin{cases} x` = x + 5y + 3, \\ y` = 2x + y - 1. \end{cases}$$

1) M(3,1) nuqtaning obrazini toping.
2) N`(-1,2) nuqtaning proobrazini toping
3) x-4y+6=0 to`g`ri chiziqning obrazini toping.
4) y=2x-6 to`g`ri chiziqni aslini toping.

3. Affin almashtirishni invariant nuqtasini toping

$$\begin{cases} x` = x + 5y + 3, \\ y` = 2x + y - 1. \end{cases}$$

4. Tekislikdagi barcha affin almashtirishlari to`plami gruppa tashkil etishini isbotlang.
5. Affin almashtirishlar uchta mos nuqtalari bilan berilgan:

$A(0,1) \to A`(1,0), B(1,0) \to B`(0,1), C(1,1) \to C`(1,1).$ Affin almashtirish formulalarini toping.

6. Aylananing o`zaro perpendikulyar diametrlari va ularga parallel vatarlari o`rtalarini birlashtiruvchi kesmalar akslari nima bo`ladi?
7. B=(O,$\vec{i}, \vec{j}$) reperdan $\overrightarrow{e_1} = \vec{i}$, $\overrightarrow{e_2} = k\vec{j}$ shartlar bilan B`=(O`,$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$) reperga o`tkazilgan bo`lsin:

1) ushbu almashtirishning affin almashtirishi ekanini isbotlang;
2) almashtirishning invariant elementlarini toping.

8. Parallel ko`chirish affin almahtirishning xususiy holi ekanligini isbotlang.
9. Affin almashtirishi xossalarini uning analitik berilishi yordamida isbotlang.
10. Affin almashtirishi nimalar yordamida to`liq beriladi?

Inversion almashtirishlar

Biz yuqorida ko`rib o`tgan almashtirishlar (affin a,mashtirish va uning xususiy holari) chiziqli almashtirishlar hisoblanib, bu almashtirishlarda to`g`ri chiziqlarning obrazlari yana to`g`ri chiziqdan iborat bo`lar edi. Tekislikda shunday almashtirihslar borki, ularda to`g`ri chiziqlarning obrazlari har doim ham to`g`ri chiziq bo`lavermaydi. Bunday almashtirishlardan biri inversiyadir. Iversiya so`zi lotincha *inversio* so`zidan olingan bo`lib, teskarisini ag`darish ma’nosini bildiradi.

Tekislikda bizga *O* markazli aylana va r radiusli *(O,r)* aylana berilgan bo`lsin.

Ta’rif. Aylana markazidan chiqqan nurning ikki nuqtasidan shu aylana markazigacha bo`lgan masofalarning ko`paytmasi aylana radiusining kvadratiga teng bo`lsa, bunday ikki nuqta bu aylanaga nisbatan inversion mos nuqtalar deyiladi.

Ta’rifga ko`ra *(O,r)* aylana tekisligidagi (*O* nuqtadan tashqari) *A* va *A’* nuqtalar shu aylanaga nisbatan inversion mos nuqtalar bo`lishi uchun quyidagi sharlarni qanoatlantirishi kerak:

- A' nuqta OA nurda yotadi;
- $|OA|\cdot|OA'|=r^2$ munosabat o`rinli;
- O nuqta *A* va A' nuqtalar orasida yotmaydi.

Ta’rif. (O,r) inversiya deb (yoki *O* markazli *r* radiusli aylanaga nisbatan simmetriya) tekislikning istalgan *M* nuqtasiga *OM* nurda yotuvchi va

$$|OM|\cdot|OM'|=r^2$$

shartni qanoatlantiruvchi M' nuqtani mos keltiruvchi almashtirishga aytiladi. *O* - nuqta inversiya markazi (tekislikda obrazi aniqlanmagan yagona nuqta), *r* - inversiya radiusi, (O,r) – inversiya aylanasi deyiladi.

Inversiyaning asosiy xossalari:

1) aylana ichidagi nuqtalar aylana tashqarisidagi nuqtalarga va aksincha aylana tashqarisidagi nuqtalar aylana ichidagi nuqtalarga akslanadi;
2) inversiya aylanasiga tegishli nuqtalar o`z-o`ziga akslanadi;
3) inversiya markazidan o`tuvchi to`gri chiziq oz-oziga akslanadi;
4) inversiya markazidan o`tuvchi aylana to`g`ri chiziqqa akslanadi;
5) inversiya markazidan o`tmagan aylana aylanaga akslanadi;
6) inversiyada chiziqlar orasidagi burchak kattaligi saqlanadi;
7) inversiya tekislikdagi boshqa simmetriyalar singari uni ikki marta bajarish bilan ayniy almashtirishga aylanadi.

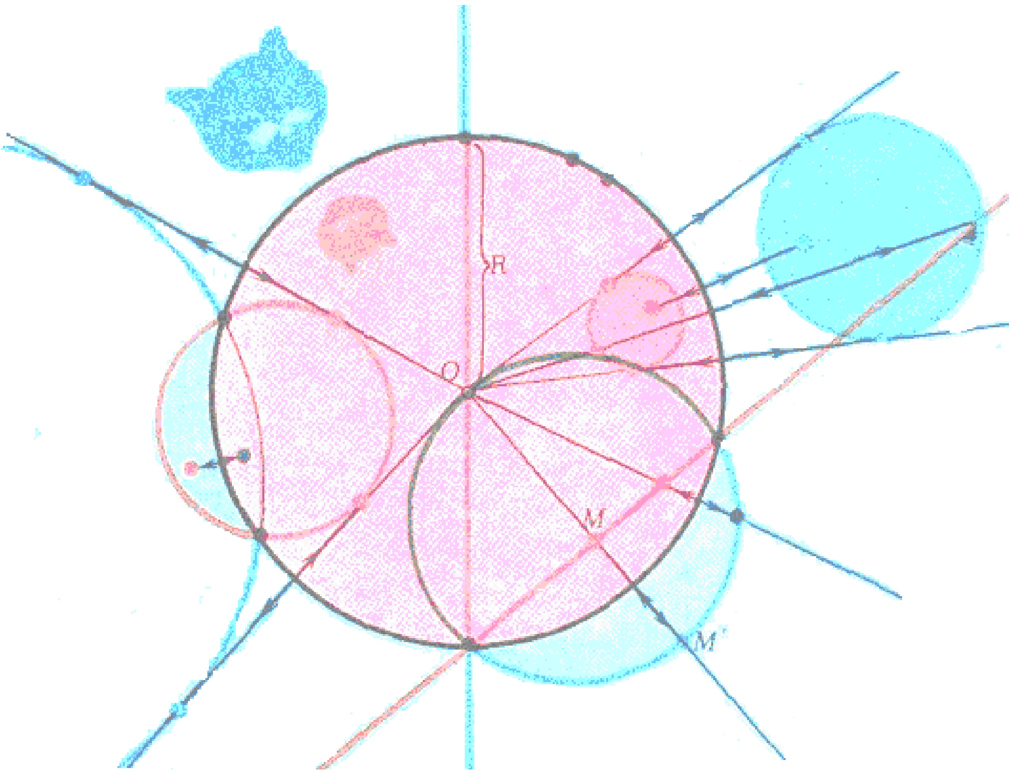
Yuqorida aytib o`tilgan xossalar isboti to`g`ridan-to`g`ri hosil qilinadi. Bu xossalar isboti pedagogika oliy o`quv yurtlari Geometriya kursida o`rganiladi.

8) istalgan inversiya aylanasiga ortogonal aylana o`z-o`ziga akslanadi.

Isbot. γ berilgan aylana 4-xossaga asosan inversiyada γ' aylanaga akslangan bo`lsin. 2-xossaga ko`ra γ aylana inversiya aylanasi bilan A va B nuqtalarda kesishgan bo`lsin. Bu nuqtalarning obrazi yana shu nuqtalarning o`zi bo`ladi. $\gamma'$ aylana ham ushbu nuqtalardan o`tadi. 5- xossaga asosan γ' aylana inversiya aylanasiga ortogonal bo`ladi. Ammo 1-masalaga asosan $A$ va $B$ nuqtalardan aylanaga yagona ortogonal aylana o`tkazish mumkin edi. Demak, γ va γ' aylanalar ustma-ust tushadi.

9) inversiya aylanasi bilan ustma-ust tushmagan aylana o`z-o`ziga akslansa, bu aylana inversiya aylanasiga ortogonal bo`ladi.

Isbot. 1-xossaga ko`ra berilgan $\gamma$ aylana inversiya aylanasini (2-xossa asosida) o`z-o`ziga akslanuvchi $A$ va $B$ nuqtalarda kesib o`tadi. Inversiya markazi O va A nuqtadan OA to`g`ri chiziq o`tkazamiz. Agar $A$ nuqta $OA$ va $\gamma$ aylanalarning yagona umumiy nuqtasi bo`lmasa, ularning yana qandaydir D umumiy nuqtasi mavjud bo`lib, $D$ nuqtaning obrazi $D'$ nuqtasida ham kesishishi kerak bo`ladi. Ammo to`g`ri chiziq va aylana uchta umumiy nuqtaga ega bo`la olmaydi. Demak, $A$ nuqta $\gamma$ aylana va $OA$ to`g`ri chiziqning yagona umumiy nuqtasi bo`ladi va OA to`g`ri chiziq γ aylanaga A nuqtada urinar ekan.

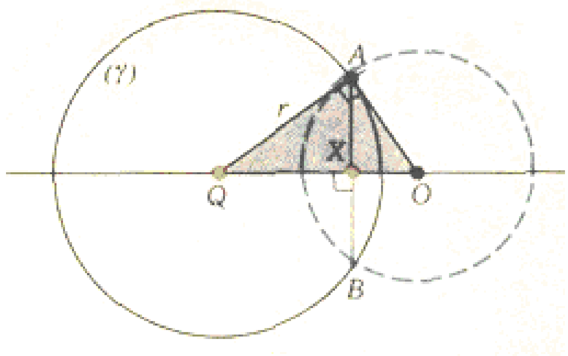


4-chizma

Inversiya Puakare modelida siljitish vazifasini bajaradi. Shuning uchun model mohiyatini o`rganish uchun inversion yasashga doir masalalarni bilish muhim ahamiyatga ega.

3-masala. Q marqazli γ aylana ichidagi X nuqta berilgan. γ aylanaga ortogonal shunday aylana yasangki, bunda X va Q nuqtalar simmetrik bo`lsin.

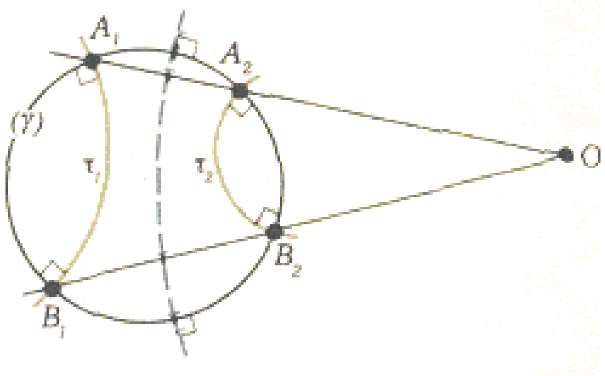
Yechish. QX to`gri chiziqqa perpendikulyar to`g`ri chiziq $\gamma$ aylana bilan $A$ nuqtada kesishadi. $A$ nuqtadan $QA$ ga perpendikulyar to`g`ri chiziq $QX$ to`g`ri chiziqni $O$ nuqtada kesib o`tadi. $(O,|OA|)$ aylana izlangan aylana bo`ladi (5-chizma).



5-chizma

4-masala. Berilgan ikki γ aylanaga orthogonal τ_1 *va* τ_2 aylanalar uchun γ aylanaga orthogonal va τ_1 *va* τ_2 aylanalar simmetrik bo`lgan to`g`ri chiziq yoki aylana yasang.

Yechish. A_1, B_1 va A_2, B_2 nuqtalar mos ravishda γ va τ_1 , γ va τ_2 aylanalarning kesishgan nuqtalari bo`lsin. Agar $A_1A_2$ va $B_1B_2$ to`g`ri chiziqlar parallel bo`lsa, τ_1 *va* τ_2 aylanalar γ aylana dimetriga nisbatan simmetrik bo`ladi. Agarda $A_1A_2$ va $B_1B_2$ to`g`ri chiziqlar $O$ nuqtada kesishsa, 2-masalaga asosan $O$ markazli $\gamma$ aylanaga orthogonal aylana o`tkazish mumkin (6-chizma). Bu aylana izlangan aylana bo`ladi.



6-chizma

Eslatma. τ_1 *va* τ_2 aylanalardan biri γ aylanaga orthogonal to`g`ri chiziq bo`lsa, u holda uning diametri bo`ladi.

5-masala. Inversion almashtirishda inversiya markazidan o`tuvchi to`g`ri chiziqning obrazi yana shu to`g`ri chiziqning o`zi bo`lishini isbotlang.

Yechish. Sodda hol uchun, ya'ni, inversiya markazi koordinatalar boshida bo`lgan inversion almashtirishni qaraymiz. U holda almashtirish formulalari

$$\begin{cases} x` = \dfrac{x}{x^2 + y^2} r^2; \\ y` = \dfrac{y}{x^2 + y^2} r^2. \end{cases}$$

ko`rinishda bo`ladi. Koordinata boshidan o`tuvchi to`g`ri chiziq y=kx ko`rinishida bo`ladi. Almashtirish formulasidan x va y o`zgaruvchilarni x` va y` o`zgaruvchilar orqali ifodasini topamiz:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x`}{x`^2 + y`^2} r^2, \\ y = \dfrac{y`}{x`^2 + y`^2} r^2. \end{cases}$$

Topilgan bu fodalarni to`g`ri chiziq tenglamasiga qo`yamiz. $\frac{y`}{x`^2+y`^2} r^2 = k \frac{x`}{x`^2+y`^2} r^2 \Rightarrow y` = kx`$.

Eslatma. Inversiyaning boshqa xossalarini ham uning analitik ko`rinishidan foydalanib isbotlash mumkin.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. O`zaro urinuvchi aylana bilan to`g`ri chiziqning birini ikkinchisiga o`tkazuvchi inversiya markazi va radiusini toping.
2. O`zaro kesishuvchi aylana bilan to`g`ri chiziqning birini ikkinchisiga o`tkazuvchi inversiyaning markazi va radiusini toping.
3. Ikki to`g`ri chiziqdan birini ikkinchisiga o`kazuvchi inversiya mavjudmi?
4. O`zaro tashqi yoki ichki urinuvchi ikki aylanadan birini ikkinchisiga o`tkazuvchi inversiya aylanasini toping.
5. Biri ikkinchisining tashqarisida yotib, bir-biriga urinmovchi ikki aylanadan birini ikkinchisiga o`tkazuvchi inversiya aylanasini toping.
6. O`zaro urinuvchi ikki aylanani parallel ikki to`g`ri chiziqqa o`tkazuvchi inversiyaning markazi qayrda joylashgan.
7. Teng tomonli uchburchakni unga ichki chizilgan aylanaga nisbatan inversion akslantiring.
8. Teng tomonli uchburchakni unga tashqi chizilgan aylanaga nisbatan inversion akslantiring.
9. Inversiya markazidan o`tuvchi to`g`ri chiziqqa inversiya markazida urinuvchi aylanaga inversion mos figura o`sha to`g`ri chiziqqa parallel ikkinchi bir to`g`ri chiziq bo`lishini isbot qiling.
10. Inversiya aylanasi to`g`ri chiziqqa "aylanganda" inversiya qanday akslantirishga o`tadi.
11. O`zaro urinuvchi aylana va to`g`ri chiziqni, markazi ularning urinish nuqtasida bo`lgan aylanaga nisbatan inversion almashtirganda o`zaro parallel to`g`ri chiziqlar hosil bo`lishini isbotlang.
12. Berilgan A1 va A2 aylanalarni bir-biriga inversion almashtiruvchi A inversiya aylanasini chizing.

II. FAZODA ALMASHTIRISHLAR

Fazoda harakatlar

Matematika, fizika, mexanika va boshqa fundafental fanlar, jumladan, geometriyada harakat ikki nuqta orasidagi masofani saqlovchi almashtirish sifatida ta’riflanadi. Fazoda harakatlarning asosiy turlari parallel ko`chirish, to`g`ri chiziq atrofida burish (I tur) va tekislikka nisbatan simmetriya (II tur) hisoblanadi. Fazodagi boshqa harakat turlari ularning kombitansiyalari yordamida hosil qilinadi. Masalan:

vint bo‘yicha harakat - to‘g‘ri chiziq atrofida burish va shu to‘gri chiziq yo‘nalishida parallel ko‘chirish;

burish simmetriyasi - tekislikka nisbatan simmetriya va unga perpendikuliyar to‘g‘ri chiziq atrofida burish;

sirpanuvchi simmetriya - tekislikka nisbatan simmetriya va unga parallel vektor bo‘yicha parallel ko‘chirishlar ko‘paytmasidan hosil qilinadi.

To‘g‘ri chiziq atrofida burish

Fazoning ixtiyoriy *M* nuqtasini biror a to‘g‘ri chiziq atrofida burish masalasini qaraylik. Buning uchun *M* nuqta orqali o‘tuvchi va to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar tekislikni o‘tkazamiz. Ular biror *O* nuqta orqali kesishadi. Ushbu tekislikda uchi *O* nuqta bir tomoni *OM* bo‘lgan berilgan α burchakka teng oriyentatsiyali burchak qo‘yiladi. Burchakni ikkinchi tomonida *O* nuqtadan boshlab $OM = OM'$ kesmani qo‘yish bilan M` nuqtani hosil qilamiz.

Yuqorida keltirib o‘tilgan yo‘l bilan topilgan M' nuqta *M* nuqtani a to‘g‘ri chiziq atrofida α burchakka burishdagi obrazi deyiladi.

Biz a to‘g‘ri chiziq sifatida *OZ* o‘qini va tayin α oriyentatsiyali burchak bo‘yicha to‘g‘ri chiziq atrofida burishni qaraylik. Ma’lumki, fazoning ixtiyoriy *M(x,y,z)* nuqtasini *OZ* o‘qi atrofida burganimizda uning aplikatasi o‘zgarishsiz qoladi. *OZ* o‘qining uchidan *XOY* tekislikka qaraganimizda *M* nuqta guyoki *O* nurta atrofida α burchakka buriladi. Ushbularni hisobga olsak almashtirish formulalari quyidagi ko‘rinishda bo`ladi:

$$\begin{cases} x' = x\,cos\alpha\ - y\,sin\alpha\,, \\ y' = x\,sin\alpha + y\,cos\alpha, \\ z' = z. \end{cases} \qquad (1)$$

To‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirish

Fazoda to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirishni to‘g‘ri chiziq atrofida burishning $\alpha = \pi$ bo`lgandagi xususiy holi ekanligini ta’kidlab o`tish lozim. Demak, almashtirish formulasi

$$\begin{cases} x' = -x\ , \\ y' = -y, \\ z' = z. \end{cases} \tag{2}$$

Ushbu almashtirshni to`g`ri chiziq *Oz* o`qi bo`lmasdan ixtiyoriy to`g`ri chiziq bo`lgan holni alohida mustaqil masala sifatida ham qarash mumkin.

Fazoda berilgan to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirishda nuqtaning orazini topish uchun berilgan nuqtadan o‘tuvchi va to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar tekislik o‘tkazamiz. Ularning umumiy nuqtasi berilgan nuqta va uning obrazi hosil qilgan kesmaning o‘rtasi bo`ladi. Kesmaning boshi va o‘rtasi ma’lum bo`lgan holda uning oxiri topiladi (7-chizma).

Bizga fazoda u to`g`ri chiziq o`zining ikki tekislikning kesishishi ko`rinishida berilgan bo`lsin:

$$u\colon \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

$M(x, y, z)$ (M $\notin$ u) nuqtaning to`g`ri chiziqqa nisbatan simmetrik obrazi $M'(x'; y'; z')$, M_0 nuqta esa MM' kesmaning o`rtasi bo`lsin. Tabiiyki, bu nuqta berilgan to`g`ri chiziqqa tegishli bo`lib, $M$ nuqtaning $u$ to`g`ri chiziqdagi ortogonal proyeksiyasi bo`ladi.

Ma`lumki, $\vec{u}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$ vektor u to`g`ri chiziqning yo`naltiruvchi vektori bo`lib, qulaylik uchun uni $\vec{u}(A, B, C)$ ko`rinishda belgilaylik. M nuqtadan o`tib, u to`g`ri chiziqqa perpendikulyar tekislik

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad \text{yoki}$$

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0.$$

Bu yerda $-(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = D$ belgilash olsak,

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{4}$$

Ushbu tekislik va berilgan to`g`ri chiziq kesishishidan hosil bo`lgan nuqta izlanayotgan $M_0$ nuqta bo`ladi. (3) va (4) tenglamalarni birgalikda yechish

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \tag{5}$$

chiziqli tenglamalar sistemani yechishga keladi.

Bir jinsli bo`lmagan chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda Kramer usulidan foydalanaylik. So`ngra kesma o`rtasi koordinatalarini topish formulalaridan nuqta obrazi topiladi.

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A & B & C \end{vmatrix}, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} -D_1 & B_1 & C_1 \\ -D_2 & B_2 & C_2 \\ -D & B & C \end{vmatrix}, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} A_1 & -D_1 & C_1 \\ A_2 & -D_2 & C_2 \\ A & -D & C \end{vmatrix},$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & -D_2 \\ A & B & -D \end{vmatrix}$$

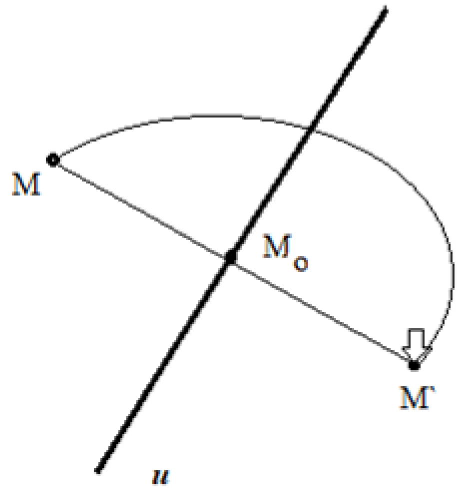
$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta_0}, \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta_0}, \quad z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta_0}.$$

M' nuqtaning koordinatalari

$$x' = 2\frac{\begin{vmatrix} -D_1 & B_1 & C_1 \\ -D_2 & B_2 & C_2 \\ -D & B & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A & B & C \end{vmatrix}} - x; \qquad y' = 2\frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 & C_1 \\ A_2 & -D_2 & C_2 \\ A & -D & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A & B & C \end{vmatrix}} - y;$$

$$z' = 2\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & -D_2 \\ A & B & -D \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A & B & C \end{vmatrix}} - z$$

ko`rinishda ifodalanadi. Topilgan ushbu formulalar fazoda to`g`ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirishning analitik ifodasi bo`ladi.



7-chizma

Tekislikka nisbatan simmetriya va uning umumlashgan formulasi

Fazoda tekislikka nisbatan simmetrik almashtirishlar va ularning umumlashgan formulalarini keltirib chiqarish bilan shug`ullanamiz. Bu jarayonni amalga oshirish quyidagicha ketma-ketlik asosida olib boriladi.

Fazoda α tekislik berilgan bo`lsin.

Ta'rif. Fazoning M va M' nuqtalari uchun MM' kesma α tekislikka perpendikulyar va MM' kesmaning o`rtasi α tekislikda yotsa, u holda bu nuqtalar α *tekislikka nisbatan simmetrik* deb ataladi.

Ta'rif. Fazoning har bir M nuqtasiga α tekislikka nisbatan simmetrik bo`lgan M' nuqtani mos keltiruvchi almashtirish *tekislik simmetriyasi* deyiladi.

O`quvchi va talabalar tekislik simmetriyasining xususiy hollari uchun analitik ifodalarni yaxshi bilishadi. Masalan, tekislik sifatida *XOY* tekisligi olinsa, fazoning istalgan *M(x,y,z)* nuqtasiga ushbu tekislikka nisbatan simmetrik bo`lgan $M'(x, y, -z)$ nuqta mos keltiriladi. Bunga ko`ra ushbu xususiy hol uchun analitik ifoda ushbu ko`rinishda ifodalanadi:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \\ z' = -z. \end{cases} \qquad (1)$$

Ushbu analitik ifodadan foydalangan holda qator masalalarni yechish bilan birga, tekislik simmetriyasining barcha xossalarini tahlil etish mumkin. Shuningdek, noma'lumlar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan uchinchi tartibli determinant -1 ga tengligidan, harakat ikkinchi tur ekanligini ham ta'kidlab o`tish lozim.

Ta'rif asosida nuqtani tekislikka nisbatan simmetrik obrazini topishning analitik ifodasini topish bilan shug'ullanamiz (8-chizma).

Faraz qilaylik, bizga fazoda *M(x,y,z)* nuqta va α tekislik o`zining umumiy tenglamasi *Ax+By+Cz+D=0* bilan berilgan bo'lsin. M nuqtaning α tekislikka nisbatan simmetrik obrazini $M'(x', y', z')$ deb olaylik.

Birinchi ma'lumot, MM` kesmaning o'rtasi $M_0(x_o, y_0, z_0)$ nuqta bo`lib, uning koordinatalari

$$x_0 = \frac{x'+x}{2}, \qquad y_0 = \frac{y'+y}{2}, \qquad z_0 = \frac{z'+z}{2}$$

ko`rinishda hamda bu nuqta α tekislikka tegishli.

Ikkinchi ma'lumot, $\overrightarrow{MM`}$ vektor va tekislikning $\vec{n}$(A,B,C) normal vektori kollinear ekanligidan $\overrightarrow{MM`}$ =t$\vec{n}$ munosabat o`rinli bo`lib, quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x' - x = tA, \\ y' - y = tB, \\ z' - z = tC. \end{cases} \qquad (2)$$

M_0 nuqtaning koordinatalarini tekislik tenglamasiga qo`yamiz,

$$A\frac{x'+x}{2}+B\frac{y'+y}{2}+C\frac{z'+z}{2}+D=0. \quad (3)$$

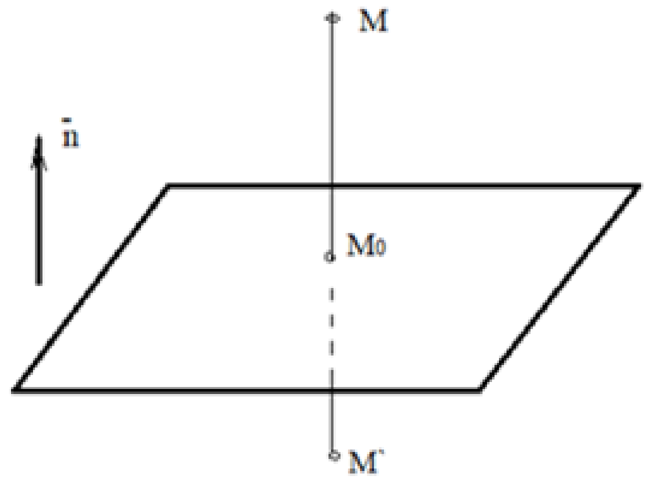
(2) tenglikdan x`, y`, z` larni aniqlab, (3) tenglikka qo`ysak, undan t parametr aniqlanadi:

$$t = \frac{-2(Ax+By+Cz+D)}{A^2+B^2+C^2}. \quad (4)$$

t parametrning topilgan qiymatini (2) ga qo`yib x`, y`, z` o`zgaruvchilarni x, y, z o`zgaruvchilar orqali ifodalarini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x' = x - 2A\frac{Ax+By+Cz+D}{A^2+B^2+C^2}, \\ y' = y - 2B\frac{Ax+By+Cz+D}{A^2+B^2+C^2}, \\ z' = z - 2C\frac{Ax+By+Cz+D}{A^2+B^2+C^2}. \end{cases} \quad (5)$$

(5) - formula fazoda tekislik simmetriyasining umumlashgan analitik ifodasi bo`ladi. Bu formulalardan tekislik simmetriyasining bizga tanish bo`lgan yuqoridagi xususiy hollardagi formulalarini kelib chiqishini ko`rishimiz mumkin. Buning uchun umumlashgan analitik ifodaga $A = B = D = 0,\ C = 1$ qiymatlarni qo`yish kifoya.



8-chizma

Fazoda sferaga nisbatan inversiya va uning xossalari

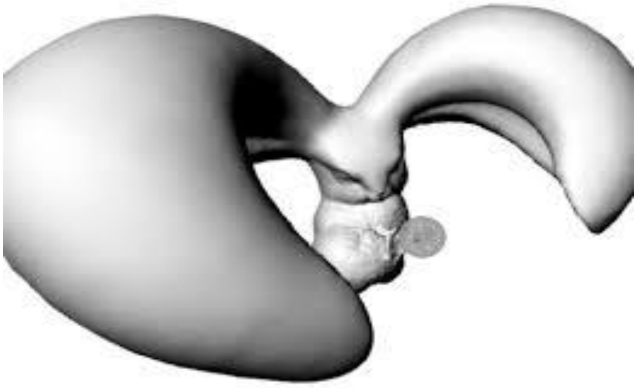
Fazoda sferaga nisbatan inversiya ham tekislikdagi anologi bo`lgan aylanaga nisbatan inversiya kabi kiritiladi (9-chizma).

Ta`rif. Fazoda markazi *O* nuqta, radiusi *R* bo‘lgan sferaga nisbatan inversiya deb fazoning ixtiyoriy M nuqtasiga (O nuqtadan farqli) OM nurda yotuvchi va

$$|OM| \cdot |OM'| = R^2 \qquad (1)$$

shartni qanoatlantiruvchi M` nuqtani mos keltirishga aytiladi.

Berilgan sfera inversiya sferasi, *O* nuqta inversiya markazi, *R* inversiya radiusi deyiladi.

9-chizma

Ta’rifga asosan inversiya sferasi ichidagi (inversiya markazidan boshqa) har bir nuqtaga inversion mos nuqtani topish mumkin. Agar chizmadagi sferani katta aylana bo`ylab $O, A, M'$ nuqtalardan o`tuvchi tekislik bilan kessak, u holda tekislikdagi inversion nuqtani topishga kelamiz (10a-chizma).

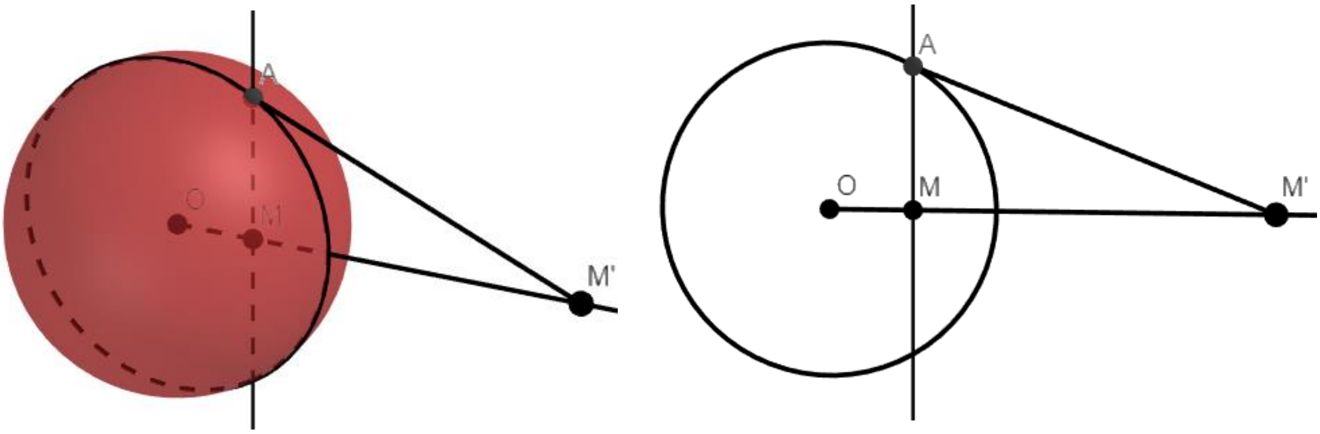
OM to‘g‘ri chiziqni o‘z ichiga oluvchi ixtiyoriy tekislik W sferani uning katta aylanasi bo‘ylab kesadi. Shuning uchun sferaga nisbatan inversiyada M nuqtaning obrazi M` ni yasash masalasi kesimdagi katta aylanaga nisbatan inversiyada M nuqtaning obrazini yasash masalasiga keladi (10b-chizma).

Quyida sferaga nisbatan inversiyaning xossalarini ko`ramiz:

1. Sferaga nisbatan inversiyada ham M nuqta M' nuqtaga inversion mos bo`lsa, u holda $M'$ nuqta ham $M$ nuqtaga inversion mos bo`ladi. Bu yerda M va M' nuqtalar teng kuchli hisoblanadi, ya`ni agar $M \to M'$ bo‘lsa u holda, $M' \to M$ bo‘ladi bitta inversiyaga nisbatan. Buning ma`nosi shuki, berilgan sferaga nisbatan inversiyaga teskari almashtirish ham bu inversiya bilan ustma-ust tushadi. Sferaga nisbatan inversion almashtirish ham involutsion almashtirishdir (10-chizma).

2. M nuqta sfera markaziga yaqinlashib borgani sari M' nuqta O markazdan cheksiz uzoqlashib boradi va aksincha. Buning to`g`riligini (1) tenglikdan ko`rishimiz mumkin. ya`ni:

$$OM' = \frac{R^2}{OM}$$



a) b)

10-chizma

Tenglikdagi kasrning maxraji cheksiz kichiklashib nolga intilgani sayin OM' cheksiz kattalashib boraveradi. Lekin, M nuqta sfera markazi bilan ustma-ust tushganda (1) tenglikni qanoatlantiruvchi nuqta bo`lmaydi. Shuning uchun inversiya sferasini ham markazisiz qaraymiz.

3. Inversiyada inversiya sferasidagi nuqtalar o‘z-o‘ziga o‘tadi.

4. Inversiya sferasi tashqarisidagi nuqtalar inversiya sferasi ichidagi nuqtalarga o`tadi.

5. Inversiya sferasi ichidagi nuqtalar (sfera markazidan boshqa) inversiya sferasi tashqarisidagi nuqtalarga o`tadi.

6. Inversiya sferasi markazidan chiqqan nurning sfera ichidagi qismi inversiyada sferadan tashqaridagi bo`lagiga o`tadi va aksincha.

7. Inversiya sferasining radiusi cheksiz kattalashib, sfera tekislikka yaqinlashib borgani sari inversiya tekislikka nisbatan simmetriyaga yaqinlashib boradi.

Fazoda sfera markaziga nisbatan turli darajada ketma-ket bajarilgan ikki inversiya o`sha markazga nisbatan bajarilgan gomotetiya bo`ladi

Xuddi tekislikdagi inversiyaning koordinatalardagi ifodasiga o‘xshash tarzda fazodagi sferaga nisbatan inversiyaning formulasi keltirib chiqariladi. Agar

M`(x`,y`,z`) nuqta M(x,y,z,) nuqtaning obrazi bo‘lsa u holda quyidagilar inversiyaning koordinatalardagi ifodasi bo‘ladi :

$$x' = \frac{x\,R^2}{x^2+y^2+z^2}\,, \quad y' = \frac{y\,R^2}{x^2+y^2+z^2}\,, \quad z' = \frac{z\,R^2}{x^2+y^2+z^2}\,. \qquad (2)$$

R=1 bo`lganda esa (2) formula quyidagi ko`rinishga keladi

$$x' = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\,, \quad y' = \frac{y}{x^2+y^2+z^2}\,, \quad z' = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\,.$$

Sferaga nisbatan inversiyada A va B nuqtalarning obrazlari orasidagi A`B` masofa AB masofa orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$A'B' = AB\,\frac{R^2}{OA * OB}.$$

11-chizma

Sferaga nisbatan inversiyada tekislik va sferaning inversion obrazi

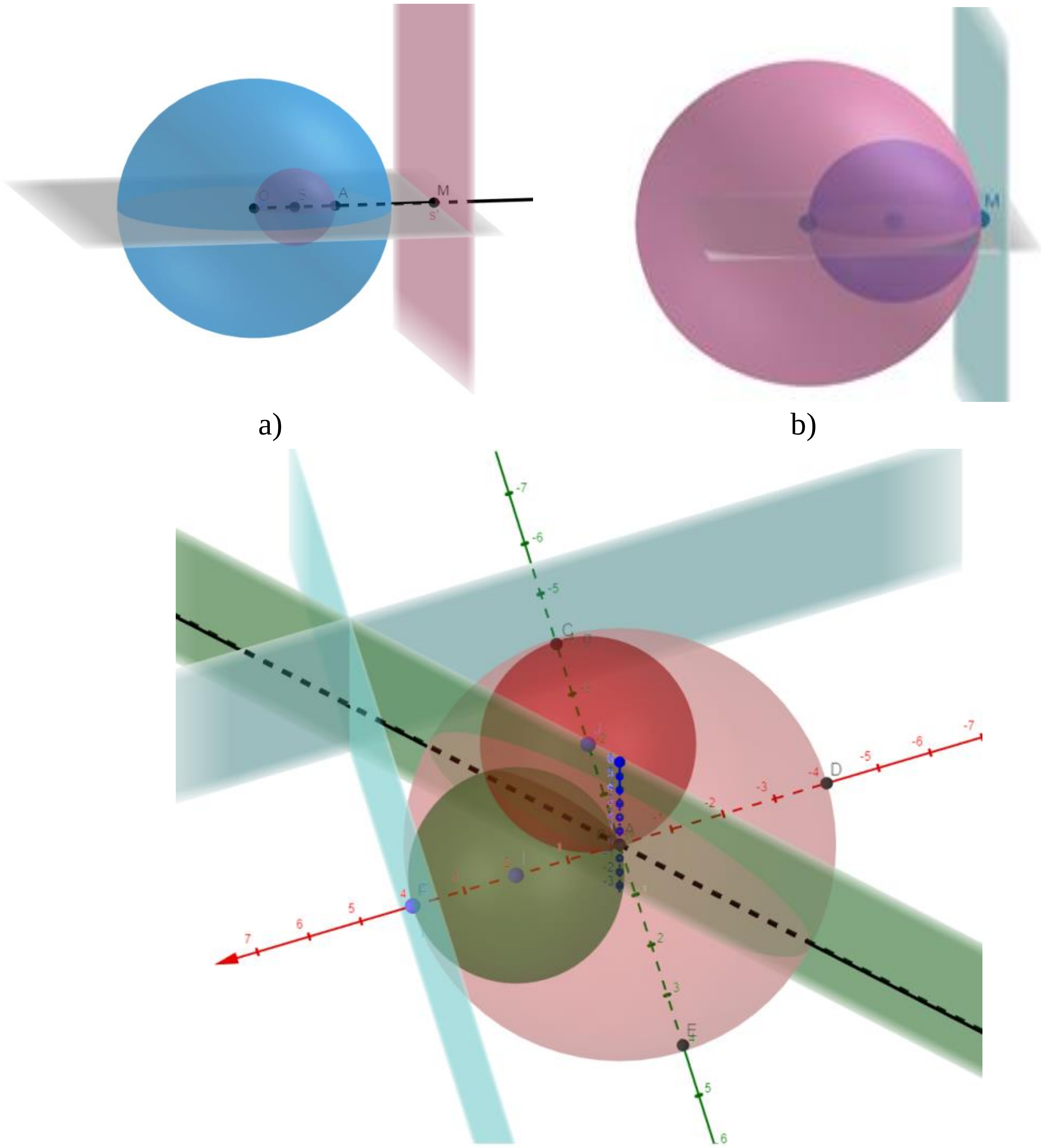
Endi fazoda sferaga nisbatan inversiyada to`g`ri chiziq va tekislikning obrazlari qanday figuralar bo`lishini ko`rib chiqamiz:

- inversiya sferasi o`z-o`ziga o`tadi;
- O nuqtadan, ya‘ni, inversiya markazidan o‘tadigan to`g`ri chiziq O nuqtani hisobga olmaganda o‘z -o‘ziga akslanadi.
- inversiya markazidan o`tuvchi tekislik (O nuqtasiz) o`z-o`ziga o`tadi;
- inversiya markazidan o‘tmaydigan tekislikning aksi inversiya markazidan o‘tuvchi sfera bo‘ladi. Bu sferaning diametri OA kesma bo‘ladi.

Tekisliklarni inversion almashtirishda quyidagi hollar bo`lishi mumkin:

- berilgan tekislik inversiya sferasi bilan umumiy nuqtaga ega bo`lmasa u holda tekislikning inversion obrazi inversiya markazidan o`tuvchi sfera bo`lib, u ham inversiya sferasi bilan umumiy nuqtaga ega bo`lmaydi (12a-chizma);

- agar berilgan tekislik inversiya sferasiga urinsa, u holda bu tekislikning inversion obrazi ham shu urinish nuqtasida ularga urinib, inversiya markazidan o`tuvchi sfera bo`ladi (12b-chizma);
- agar berilgan tekisliklar inversiya sferasini kesib o`tsa, u holda ularning inversion obrazlari ham inversiya sferasini kesib o`tuvchi sfera bo`ladi (12c-chizma).



a) b)

c)

12-chizma

Fazoda sferaga nisbatan inversiyada aylana va sferaning inversion obrazi qanday figura bo`lishini qaraymiz:

- fazoda inversiya markazidan o`tmaydigan aylananing inversion obrazi inversiya markazidan o`tmaydigan aylana bo`ladi;
- fazoda inversiya markazidan o`tuvchi aylanaga inversion mos figura inversiya markazidan o`tmaydigan to`g`ri chiziq bo`ladi;
- inversiya markazidan o‘tuvchi S sferaning aksi bu sfera va inversiya sferasi markazlaridan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar tekislik bo‘ladi bu tekislik inversiya markazidan $\frac{R^2}{2r}$ masofada joylashgan, bu yerda r – S sferaning radiusi;
- fazoda inversiya markazidan o`tmaydigan sferaning inversion obrazi inversiya markazidan o`tmaydigan sfera bo`ladi. Bunda sferalarning markazlari bir-biriga inversion mos emas (xuddi tekislikdagi kabi). Inversiya markazi inversion mos sferalarning gomotetiya markazi bo`ladi.

Berilgan sferaning inversiya sferasiga nisbatan joylashuviga ko`ra quyidagi 38rthog bo`lishi mumkin:

- agar berilgan sfera inversiya sferasi bilan umumiy nuqtaga ega bo`lmasa va undan tashqarida joylashgan bo`lsa, uning inversion obrazi inversiya sferasining ichida joylashib, u bilan umumiy nuqtaga ega bo`lmagan sfera bo`ladi. Inversiya markazi sferalarning tashqi o`xshashlik (gomotetiya) markazi bo`ladi;
- agar berilgan sfera inversiya sferasiga 38rthogonal joylashgan bo`lsa, u holda u o`z-o`ziga akslanadi. Sferalar 38rthogonal bo`lsa, ularning radiuslari uchun quyidagi munosabat o`rinli $R_1^2 + R_2^2 = (O_1O_2)^2$;
- agar inversiya sferasi berilgan sferaning ichida joylashgan bo`lsa, uning inversion obrazi inversiya sferasining ichida joylashadi va inversiya markazi ularning ichki o`xshashlik (gomotetiya) markazi bo`ladi;
- agar berilgan sfera inversiya sferasi markazidan o`tmasa va uni kessa, unda uning inversion obrazi ham u kesib o`tgan aylana bo`ylab inversiya sferasini kesib o`tuvchi sfera bo`ladi;
- agar berilgan sfera inversiya markazidan o`tmasa va inversiya sferasiga biror nuqtada urinsa, uning inversion obrazi ham xuddi shu nuqtada urinuvchi sfera bo`ladi;
- agar berilgan sfera inversiya sferasidan tashqarida bo`lib ularning markazlari ustma-ust tushsa, uning inversion obrazi inversiya sferasining ichida joylashadi va uning markazi ham ularniki bilan ustma-ust tushadi. Agar berilgan sfera cheksiz kattalashib boraversa, uning inversion obrazi kichiklashib, inversiya markaziga intiladi va aksincha.

Endi tetraedr hajmi uchun Shtaudt formulasini isbotlashda fazodagi sferaga nisbatan inversiyaning tadbiqini ko‘rib chiqamiz.

$ABCD$ tetraedr berilgan bo‘lib $AD = a$, $DB = b$, $DC = c$, $BC = a_1$, $CA = b_1$, $AB = c_1$, va R - tetraedrga tashqi chizilgan sfera radiusi bo‘lsin. Biz

$$6VR = Q \tag{1}$$

bunda,

$$16Q^2 = (aa_1 + bb_1 + cc_1)(bb_1 + cc_1 - aa_1)(cc_1 + aa_1 - bb_1)(aa_1 + bb_1 - cc_1)$$

Markazi D nuqtada va ixtiyoriy r radiusli inversiyani qaraymiz (11-chizma).

Bu inversiyada markazi D nuqtada va radiusi R bo‘lgan sfera tekslikka tasvirlanadi va bu tekislikda tetraedrning ABC uchlarining akslari A', B', C' nuqtalarda yotadi. U holda $2R = \frac{r^2}{DH}$ (bunda DH- $A'B'C'D$ tetraedr balandligi) tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Shuningdek $\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{ABCD}} = \frac{DA' \cdot DB' \cdot DC'}{DA \cdot DB \cdot DC}$,

Yoki $\frac{S_{A'B'C'} \cdot DH}{3V} = \frac{DA' \cdot DB' \cdot DC'}{DA \cdot DB \cdot DC}$ (2)

tenglik o‘rinli.

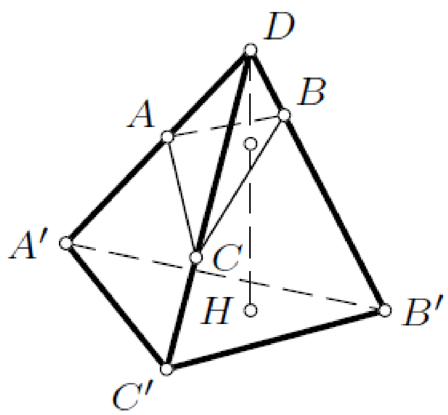
Inversiyaning xossasiga ko‘ra:

$DA' = \frac{r^2}{a}, DB' = \frac{r^2}{b}, DC' = \frac{r^2}{c}$ va

$B'C' = \frac{r^2 \cdot BC}{DB \cdot DC} = \frac{r^2 \cdot a_1}{bc} = \frac{r^2 \cdot aa_1}{abc}$,

$C'A' = \frac{r^2 \cdot bb_1}{abc}$, $A'B' = \frac{r^2 \cdot cc_1}{abc}$ (3)

munosabatlarni yozishimiz mumkin.



$A'B'C'$ uchburchakning aa_1, bb_1, cc_1 tomonlari proporsional va proporsionallik koeffisenti $k = \frac{r^2}{abc}$ ga teng. Shuning uchun

$S_{A'B'C'} = k^2 Q,$ $k^2 = \left(\frac{r^2}{abc}\right)^2$

(2) tenglikdagi o‘zgaruvchilarni o‘rniga bularni qo‘ysak

$$\frac{k^2 Q}{2R \cdot 3V} = \frac{k^6}{abc \cdot abc},$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Bundan $6VR = Q$ ga ega bo‘lamiz, bu yerda Q – tomonlari aa_1, bb_1, cc_1 bo‘lgan uchburchak yuzi.

Endi to‘rtburchaklar uchun kosinuslar teoremasi hisoblanuvchi Bretshnayder teoremasini stereometrik umumlashganini isbotini fazodagi inversiya yordamida ko‘rib chiqamiz.

Bizga ABCD tetraedr berilgan bo‘lsin. Markazi D uchda va ixtiyoriy r radiusli inversiyani ko‘rib chiqamiz. ABCD tetraedrga tashqi chizilgan sfera bu inversiyada $A'B'C'$ tekislikka asoslanadi. $A'B'C'$ uchburchak uchun kosinuslar teoremasiga ko‘ra

$$A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2 - 2A'B' \cdot B'C' \cos \widehat{A'B'C'}.$$

(3) formulaga ko‘ra

$$A'C' = AC \cdot \frac{r^2}{DA \cdot DC},\ A'B' = AB \cdot \frac{r^2}{DA \cdot DB}, A'C' = AC \cdot \frac{r^2}{DA \cdot DC}, B'C' = BC \cdot \frac{r^2}{DB \cdot DC}.$$

$A'B'$ va $B'C'$ to‘g‘ri chiziqlar DAB va DBC aylanalarning akslari bo‘lgani uchun ular D inversiya markazida o‘tkazilgan urinmalarga mos ravishda parallel bo‘ladi. Shuning uchun $\angle A'B'C'$ burchak urinmalar orasidagi burchakka teng, ya’ni DAB va DBC aylanalar orasidagi φ burchakka teng.

Quyidagi tenglikdan o‘rniga quyishlardan so‘ng quydagilarni hosil qilamiz:

$$AC^2 \cdot \frac{r^4}{DA^2 \cdot DC^2} = AB^2 \cdot \frac{r^4}{DA^2 \cdot DB^2} + BC^2 \cdot \frac{r^4}{DB^2 \cdot DC^2} - \frac{2r^4 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \varphi}{DA \cdot DB^2 \cdot DC},$$

bu tenglikni soddalashtirib:

$$(AC \cdot BD)^2 = (AB \cdot CD)^2 + (BC \cdot DA)^2 - 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \cos \varphi, \quad (4)$$

bunda φ-DAB va DBC aylanalar orasidagi burchak.

(4) tenglik tashqi ko‘rinishidan yassi ABCD to‘rtburchak uchun Bretshnayder teoremasi bilan bir ko‘rinishga ega bo‘lib, bunda φ to‘rtburchakning $\angle A$ va $\angle C$ burchaklarining yig‘indisiga teng.

Natija: Tetraedrning ikkita yog‘iga tashqi chizilgan aylanalar qanday burchak ostida kesishsa qolgan ikkita yog‘iga tashqi chizilgan aylanalar ham shunday burchak ostida kesishadi.

Haqiqatdan ham (4) tenglik ABCD to‘rtburchakning CA va BD diagonallariga nisbatan simmetrikdir. DAB va DBC aylanalar orasidagi burchakni DAC va BAC aylanalar orasidagi burchak bilan almashtirib (4) tenglikdagi qolgan elementlarni o‘zgarishsiz qoldiramiz.

Xulosa

Akslantirishlar va almashtirishlar masalasi nafaqat aniq va tabiiy fanlarni o`rganishda, balki amaliyotda ham muhim ahamiyatga ega hisoblanadi. Jumladan, bino va inshoatlarni loyihalashtirish, rassomchilik va naqqoshlik san’tida, harbiy muhandislik va boshqa sohalarda ham keng qo`llaniladi. Ushbu masalani nazariy va amaliy jihatdan puxta o`rganish maqsadida tegishli soatlar asosida umumiy o`rta ta’lim maktablari matematika dasturiga ham kiritilgan. Shuningdek, oliy o`quv yurtlarining analitik geometriya darsliklarida to`laroq ma’lumotlar va izohli fikrlar bayon etilgan.

Uslubiy qo`llanmada akslantirishlar va almashtirishlar ta’riflangan, xossalari va turlari keltirigan. Akslantirishning har bir turini mukammal ifodalovchi misollar berilgan. Tekislik va fazodagi almashtirishlar uchun alohida boblar berilgan.

Mavjud darslik va o`quv qo`llanmalarda tekislik va fazodagi almashtirishlar uchun ta’riflar, xossalar va shu bilan birga xususiy hollar uchun (eng sodda hollar uchun) analitik ifodalar keltirilib chiqarilgan. Ushbu berilganlar yordamida barcha almashtirishlar uchun umumiy formulalarni keltirib chiqarish o`quvchi hukmiga qoldirilgan bo`lib, tipik holatlar uchun formulalar va ularni ishlatishga oid ko`rsatmalar berilgan.

Ushbu uslubiy qo`llanmada almashtirishlarni ta’riflari, xossalari, almashtirishlar ko`paytmasi va sodda hollar uchun keltirilgan formulalar yordamida har bir almashtirishning umumiy formulalari keltirib chiqarilgan. Shu bilan birga, keltirib chiqarilgan formulalarni ishlatish metodikasi, mustaqil yechish uchun misol va masalalar bayon qilingan.

Uslubiy qo`llanmadan pedagogika oliy o`quv yurtlarining tegishli yo`nalishi talabalari, maktab o`quvchilari va o`qituvchilar foydalanishlari mumkin.

Adabiyotlar

1. Н.Д.Додажонов, М.Ш.Жўраева Геометрия, 1-қисм. "Ўқитувчи", Тошкент, 1996.
2. Р.К. Отажонов Геометрик ясаш методлари, "Ўқитувчи", Т. 1978
3. А.В.Погорелов Геометрия, 7-11 синф дарслиги. "Ўқитувчи", Тошкент, 1991.
4. Х.Х.Назаров, Х.О.Очилова, Е.Г.Подгорнова Геометриядан масалалар тўплами, 1-қисм. "Ўқитувчи", Тошкент, 1997.
5. Г.И.Саранцев Сборник задач на геометрические преобразования, «Просвещение», Москва, 1981.
6. S.X.Abjalilov, S.Kamolova, M.X.Boltayeva Tekislikda nuqta atrofida burish va uning umumiy formulasi, Professor-o'qituvchilar va talabalarning XXIV ilmiy-amaliy konferensiyasi materiallari. Navoiy sh., 2009 yil, 29-30b
7. S.X.Abjalilov, B.X.Abjalilov, M.X.Boltayeva, Tekislikda burish va o`q simmetriyasining umumiy formulasi, FIZIKA, MATEMATIKA VA INFORMATIKA, Ilmiy-uslubiy jurnal, 6-son 2010 yil, T., 43-45 b
8. S.X.Abjalilov, N.Ibodullayeva, Tekislikda harakatlar va ularning analitik ifodasi, PEDAGOGIK TA'LIM, Ilmiy-nazariy va metodik jurnal, 3-son, 2011 yil, 52-55b, To shDPU
9. S.X.Abjalilov, N.M.Kamolov, D.S.Xo`jamova Tekislikda akslantirishlar va almashtirishlar, Results of National Scientific Research SCIENTIFIC-METHODICAL JOURNAL, 5 MAY 2022, PART-1
10. S.X.Abjalilov, Sadullayeva I.P. Nurulloyeva G.B. Inversion almashtirishlar va ular haqida Apolloniy Pergskiy qarashlari, "PEDAGOGS" international research journal, ISSN: 2181-4027_SJIF: 4.995, www.pedagoglar.uz, Volume-7, Issue-1, April - 2022
11. S.X.Abjalilov, B.X.Abjalilov, D.Xo'jamova, ANALITIK VA YASASH GEOMETRIYASIDA INVERSION ALMASHTIRISHLAR, EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES, Volume 3 Issue 4, April 2023, 19-23

Mundarija

S.X.Abjalilov, D.S.Xo'jamova

GEOMETRIYA
AKSLANTIRISHLAR VA ALMASHTIRISHLAR

(uslubiy qo'llanma)

Muharrir:	*A. Qalandarov*
Texnik muharrir:	*G. Samiyeva*
Musahhih:	*Sh. Qahhorov*
Sahifalovchi:	*M. Bafoyeva*

Nashriyot litsenziyasi AI № 178. 08.12.2010. Original-maketdan bosishga ruxsat etildi: 11.07.2023. Bichimi 60x84. Kegli 16 shponli. «Times New Roman» garn. Ofset bosma usulida bosildi. Ofset bosma qog'ozi. Bosma tobog'i 2,7.
Adadi 100. Buyurtma №376.

"Sadriddin Salim Buxoriy" MCHJ
"Durdona" nashriyoti: Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.
Bahosi kelishilgan narxda.

"Sadriddin Salim Buxoriy" MCHJ bosmaxonasida chop etildi.
Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy. Tel.: 0(365) 221-26-45

ISBN 978-9943-9717-2-3
9 789943 971723